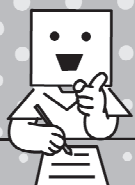


习题答案全解析



第一章 预备知识

§1 集合

1.1 集合的概念与表示

基础满分

1. D 【解析】选项 A, B, C 的标准不明确, 不满足集合中元素的确定性, 所以不能构成集合; 选项 D 中所有整数是确定的, 能构成集合. 故 D 正确.

2. A 【解析】很小的实数没有确定的标准, 不满足集合中元素的确定性, 故①错误; 集合 $\{y|y=2x^2+1\}$ 的元素为不小于 1 的实数, 而集合 $\{(x,y)|y=2x^2+1\}$ 的元素是点, 故②错误; $|- \frac{1}{2}| = 0.5 = \frac{1}{2}$, 这三个数算一个元素, 故③错误, 因此正确的有 0 个. 故 A 正确.

3. B 【解析】因为 $A = \{x \in \mathbf{R} | x < 3\}$, 即小于 3 的实数都属于 A, $2 < 3, 0 < 3, \frac{1}{2} < 3$, 故 ACD 错误, B 正确.

4. B 【解析】 $\frac{1}{3}$ 是实数, 故①正确; $\sqrt{5}$ 是无理数, 不是有理数, 故②错误; -3 是整数, 故③错误; $-\sqrt{7}$ 是无理数, 不是自然数, 故④正确. 正确的个数为 2. 故 B 正确.

5. B 【解析】因为 $A = \{-3, -2, 0, 1, 2, 3, 7\}$, $B = \{x | x \in A, -x \notin A\}$, 所以 $B = \{1, 7\}$. 故 B 正确.

6. A 【解析】由题意可得 $M = \{x \in \mathbf{N} | \frac{1}{x-2} \leq 0\} = \{x \in \mathbf{N} | \frac{1}{x-2} <$

$0\} = \{x \in \mathbf{N} | x-2 < 0\} = \{0, 1\}$, 所以 $1 \in M, 2 \notin M, 3 \notin M, 4 \notin M$, 故 A 正确.

7. 【解】 $\because 3 \in M, \therefore \frac{1+3}{1-3} = -2 \in M,$
 $\therefore \frac{1+(-2)}{1-(-2)} = -\frac{1}{3} \in M, \frac{1+(-\frac{1}{3})}{1-(-\frac{1}{3})} =$

$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2} \in M, \therefore \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3 \in M, \therefore$ 在
 M 中还有元素 $-2, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$.

故集合 M 一定含有的元素有 3, $-2, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$.

8. D 【解析】根据集合中元素的互异性可知, 构成的四边形边长不相等, 其中平行四边形、矩形和菱形对边均相等, 不符合要求. 梯形的四边长可能互不相等, 所以可能为梯形. 故 D 正确.

9. A 【解析】 \because 集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x | x = a - b, a \in A, b \in A\}$, 当 $a = 1, b = 1$ 时, $x = 1 - 1 = 0$; 当 $a = 1, b = 2$ 时, $x = 1 - 2 = -1$; 当 $a = 1, b = 3$ 时, $x = 1 - 3 = -2$; 当 $a = 2, b = 1$ 时, $x = 2 - 1 = 1$; 当 $a = 2, b = 2$ 时, $x = 2 - 2 = 0$; 当 $a = 2, b = 3$ 时, $x = 2 - 3 = -1$; 当 $a = 3, b = 1$ 时, $x = 3 - 1 = 2$; 当 $a = 3, b = 2$ 时, $x = 3 - 2 = 1$; 当 $a = 3, b = 3$ 时, $x = 3 - 3 = 0$.
 $\therefore B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, \therefore 集合 B 中元素个数为 5. 故 A 正确.

易错警示 忽略集合中元素的互异性

本题对 a 和 b 的值进行讨论求得集合 B 中的元素后, 用列举法表示集合 B 时一定要注意元素的互异性!

10. B 【解析】根据 a, b 的不同的取值, $\frac{a}{b}$ 的取值情况如下:

$\frac{a}{b}$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{7}{5}$
7	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{7}$	1

结合集合中元素的互异性, 可得 $\frac{a}{b}$ 的值构成的集合中的元素有 13 个, 故 B 正确.

11. ② 【解析】单词 book 中的字母 o 有重复, 共有 3 个不同字母, 因此单词 book 的所有字母组成的集合中的元素个数是 3, 故①错误; 因为 a, b, c 是集合 M 中的 3 个元素, 所以 a, b, c 互不相等, 因此 $\triangle ABC$ 的三边长互不相等, 故 $\triangle ABC$ 不可能是等腰三角形, 故②正确;

小于 10 的自然数不管按哪种顺序排列, 构成的集合里面的元素都是 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 这 10 个数, 集合是相同的, 故③错误;

集合 $M=\{3,4\}$ 表示数 3,4 构成的集合,集合中有两个元素,集合 $N=\{(3,4)\}$ 是点集,集合中有一个元素,故集合 M 与 N 不是同一个集合,故④错误.

易错警示 忽略集合中元素的性质

性质

注意理解集合中元素的性质,明确集合中元素的确定性,以及集合与元素的关系,可进行适当变形,或者写出一些集合中的元素进行比较(注意尽可能多写且要注意特殊元素).

12. B 【解析】方程 $x^2=4$,解得 $x=2$ 或 $x=-2$,解集用列举法表示为 $\{-2,2\}$. 故 B 正确.

13. D 【解析】因为集合 $M=\left\{a \mid \frac{6}{5-a} \in \mathbf{N}_+, \text{ 且 } a \in \mathbf{Z}\right\}$,所以 $5-a$ 可能为 1,2,3,6, a 可取 -1,2,3,4,所以 $M=\{-1,2,3,4\}$,故 D 正确.

14. C 【解析】 \because 原方程可变为 $(|x|-6)(|x|+2)=0, \therefore |x|=6, x=\pm 6, \therefore$ 原方程的解集是 $\{-6,6\}$,故 C 正确.

15. C 【解析】解 $\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+x=2 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=-2, \\ y=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1, \\ y=-1 \end{cases}$, 即原方程组的解集为 $\{(1,-1),(-2,2)\}$,故 C 正确.

16. 【解】(1) 因为不大于 10 是小于或等于 10,非负是大于或等于 0,所以不大于 10 的非负偶数集是 $\{0,2,4,6,8,10\}$.

(2) 方程 $x^2=x$ 的实数解是 $x=0$ 或 $x=1$,所以方程的实数解组成的集合为 $\{0,1\}$.

(3) 将 $x=0$ 代入 $y=2x+1$,得 $y=1$,即交点是 $(0,1)$,故直线 $y=2x+1$ 与 y 轴的交点组成的集合是 $\{(0,1)\}$.

(4) 解方程组 $\begin{cases} x+y=1, \\ x-y=-1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=0, \\ y=1 \end{cases}$,所以用列举法表示方程组 $\begin{cases} x+y=1, \\ x-y=-1 \end{cases}$ 的解组成的集合是 $\{(0,1)\}$.

17. 【解】(1) 函数 $y=-2x^2+x$ 图象上的所有点组成的集合是点集,故用描述法可表示为 $\{(x,y) \mid y=-2x^2+x\}$.

(2) 不等式 $2x-3<5$ 的解组成的集合是数集,故用描述法可表示为 $\{x \mid 2x-3<5\}$.

(3) 被 3 除余数等于 1 的正整数组成的集合是数集,故用描述法可表示为 $\{x \mid x=3n+1, n \in \mathbf{N}\}$.

(4) 3 和 4 的所有正的公倍数组成的集合是数集,故用描述法可表示为 $\{x \mid x=12n, n \in \mathbf{N}_+\}$.

易错警示 忘记区分数集与点集

用描述法表示集合时,要注意集合中的元素是数还是点哦!

18. C 【解析】区间 $(0,1]$ 表示由 $0<x \leq 1$ 的实数组成的集合,即 $\{x \mid 0<x \leq 1\}$. 故 C 正确.

19. A 【解析】由题意可知, $2a-1<11$,解得 $a<6$,故 A 正确.

20. (1) $[10,100]$ (2) $(1,+\infty)$

【解析】(1) $\{x \mid 10 \leq x \leq 100\}$ 用区间表示为 $[10,100]$.

(2) $\{x \mid x>1\}$ 用区间表示为 $(1,+\infty)$.

21. 【解】(1) $\{x \mid x \leq -2\ 023\} =$

$(-\infty, -2\ 023]$.

(2) $\{x \mid x \geq 2\ 022\} = [2\ 022, +\infty)$.

(3) $\{x \mid -5<x<6\} = (-5,6)$.

7.4 重难点上分

1. D 【解析】集合 $\{(x,y) \mid x \in \{0,1\}, y \in \{1,2\}\}$ 表示为 $\{(0,1), (0,2), (1,1), (1,2)\}$. 故 D 正确.

2. C 【解析】方程组 $\begin{cases} x+y=1, \\ x-y=-1, \end{cases}$ 两式相加得 $x=0$,两式相减得 $y=1$. 方程组的解集为 $\{(0,1)\}$. 故 C 正确.

3. D 【解析】 $\because x^3=x, \therefore x(x-1) \cdot (x+1)=0$,解得 $x=0$ 或 $x=1$ 或 $x=-1$,又 $\because -1 \notin \mathbf{N}, \therefore$ 集合 $\{x \in \mathbf{N} \mid x^3=x\}$ 用列举法可表示为 $\{0,1\}$,故①错误;集合表示中的“ $\{\}$ ”已包含“所有”“全体”等含义,而“ \mathbf{R} ”表示所有的实数组成的集合,实数集正确表示应为 $\{x \mid x \text{ 为实数}\}$ 或 \mathbf{R} ,故②错误;联立 $\begin{cases} y=x+2, \\ y=-2x+8, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=2, \\ y=4, \end{cases}$ 一次函数 $y=x+2$ 与 $y=-2x+8$ 的图象交点坐标为 $(2,4)$,即所求集合为 $\{(x,y) \mid x=2 \text{ 且 } y=4\}$,故③错误.

4. C 【解析】当 $a^2+4a=5$ 时,解得 $a=-5$ 或 $a=1$.

当 $a=-5$ 时, $a+10=-5+10=5$,与集合中元素的互异性矛盾,舍去;当 $a=1$ 时, $A=\{12,5,11\}$,满足要求.

当 $a+10=5$ 时,解得 $a=-5$,显然与集合中元素的互异性矛盾,舍去. 综上, $a=1$,故 C 正确.

易错警示 忽略集合中元素的**互异性的验证**

根据元素与集合的关系求参数时,求得参数的值后要注意代回集合中,验证是否满足集合中元素的互异性.

5. B 【解析】 $a \in \{1, a^2 - 2a + 2\}$, 所以 $a = 1$ 或 $a = a^2 - 2a + 2$.

当 $a = 1$ 时, $a^2 - 2a + 2 = 1$, 与集合中元素的互异性矛盾, 舍去;

当 $a \neq 1$ 时, $a = a^2 - 2a + 2$, 解得 $a = 1$ (舍去) 或 $a = 2$. 综上, 实数 a 的值为 2. 故 B 正确.

6. C 【解析】由题意知 $a^2 \neq 4$ 且 $2 - a \neq 4$ 且 $a^2 \neq 2 - a$, 解得 $a \neq \pm 2$ 且 $a \neq 1$, 故 C 正确.

7. $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 【解析】集合 $A = \{x | 1 < mx - 2 < 3\} = \{x | 3 < mx < 5\}$, $\therefore 2 \in A$, $\therefore 3 < 2m < 5$, 解得 $m \in \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

8. $[3, +\infty)$ 【解析】根据题意, $3 \in A$, 则 $\frac{3-a}{6+1} \leq 0$, 即 $3-a \leq 0$, 解得 $a \geq 3$. $-2 \notin A$, 则 $\frac{-2-a}{-4+1} > 0$, 即 $-a-2 < 0$, 故 $a > -2$. 综上所述, $a \in [3, +\infty)$.

9. B 【解析】一元二次方程 $ax^2 + 2(a+1)x + 4 = 0$ 的解集为单元素集合, 即 $a \neq 0$ 且方程 $ax^2 + 2(a+1)x + 4 = 0$ 有两个相等的实根, 则 $\Delta = [2(a+1)]^2 - 16a = 0$, 解得 $a = 1$. 故 B 正确.

易错警示 忽略一元二次方程的条件

注意本题已经说明是一元二次方程, 那么二次项系数一定不为 0.

10. 【解】(1) $\because A$ 是空集, $\therefore a \neq 0$ 且

$$\Delta < 0, \therefore 9 - 8a < 0, \text{解得 } a > \frac{9}{8},$$

$$\therefore a \text{ 的取值范围为 } \left(\frac{9}{8}, +\infty\right).$$

$$(2) \text{ 当 } a = 0 \text{ 时, 集合 } A = \{x | -3x + 2 = 0\} = \left\{\frac{2}{3}\right\};$$

$$\text{当 } a \neq 0 \text{ 时, } \Delta = 0, \text{ 即 } 9 - 8a = 0, \text{ 解得 } a = \frac{9}{8}, \text{ 此时集合 } A = \left\{\frac{4}{3}\right\}.$$

$$\text{综上所述, 当 } a \text{ 的值为 } 0 \text{ 时, 集合 } A = \left\{\frac{2}{3}\right\}; \text{ 当 } a \text{ 的值为 } \frac{9}{8} \text{ 时, 集合 } A = \left\{\frac{4}{3}\right\}.$$

$$(3) \text{ 由 (1) (2) 可知, 当 } A \text{ 中至多有一个元素时, } a \geq \frac{9}{8} \text{ 或 } a = 0, \therefore a \text{ 的取值范围为 } \left\{a \left| a = 0 \text{ 或 } a \geq \frac{9}{8} \right.\right\}.$$

易错警示 忽略对方程 $ax^2 +$ $bx+c=0$ 中 a 的讨论

由于方程常有多解, 解方程时要结合集合中元素限定的条件, 一般要对方程中最高次项的系数的取值进行分类讨论, 确定方程的根的情况, 进而求得结果.

1.2 集合的基本关系**基础满分**

1. C 【解析】若 A 是空集, 则 B 一定不是空集, 若 A 不是空集, 则 B 也不是空集, 故①正确.

真子集具有传递性, 故②正确.

任何一个非空集合都有两个或两个以上的子集, 故③错误.

由 Venn 图易知④正确. 故选 C.

2. B 【解析】①集合之间的关系是包含与不包含, 因此 $\{0\} \in \{0, 1, 2\}$ 不正确, 应该为 $\{0\} \subsetneq \{0, 1, 2\}$;

② $\{0, 1, 2\} \subseteq \{2, 1, 0\}$ 正确;

③ $\emptyset \subseteq \{0, 1, 2\}$ 正确;

④ $\{0, 1\}$ 与 $\{(0, 1)\}$ 的元素形式不一样, 因此不正确;

⑤ 元素与集合之间的关系是属于与不属于的关系, 应该为 $0 \in \{0\}$, 因此不正确. 综上, 只有②③正确.

故 B 正确.

3. D 【解析】因为 $A = \{x \in \mathbf{Z} | 0 < x < 3\} = \{1, 2\}$, 所以 A 的子集有 $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$. 故 D 正确.

4. 【解】 根据题意, A 中至少有 1 个奇数, 包含两种情况, A 中有 1 个奇数或 2 个奇数.

若 A 中有 1 个奇数, 则 A 有可能为 $\{3\}, \{3, 2\}, \{3, 4\}, \{3, 2, 4\}, \{7\}, \{7, 2\}, \{7, 4\}, \{7, 2, 4\}$, 共 8 个;

若 A 中有 2 个奇数, 则 A 有可能为 $\{3, 7\}, \{3, 7, 2\}, \{3, 7, 4\}, \{3, 7, 2, 4\}$, 共 4 个, 所以这样的集合 A 共有 $8+4=12$ (个).

5. C 【解析】 $(-2, -1)$ 与 $(-1, -2)$ 为两个不同的点, 故 A 错误;

$\{(1, 2)\}$ 为点集, $\{1, 2\}$ 为数集, 故 B 错误;

因为 $|\sqrt{3}| = \sqrt{3}$, 所以两集合相等, 故 C 正确;

因为 $\{x | -1 < x \leq 1, x \in \mathbf{N}\} = \{0, 1\}$, 故 D 错误.

6. D 【解析】选项 A 和 C 表示的是点集, 与集合 A 不可能相等, 故 A, C 均错误; 选项 B 表示的不是集合, 与集合 A 不可能相等, 故 B 错误; $\because \{x | x^2 - x - 2 = 0\}$ 为方程 $x^2 - x - 2 = 0$ 的解集, $\therefore \{x | x^2 - x - 2 = 0\} = \{-1, 2\}$, \therefore 与集合 $A = \{-1, 2\}$ 相等的是 $\{x | x^2 - x - 2 = 0\}$, 故 D 正确.

7. 【解】① $\{x \mid x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$,

$$\left\{x \mid \begin{cases} 2x+4>0, \\ x+3<0 \end{cases}\right\} = \emptyset, \therefore \{x \mid x^2+1=$$

$$0\} = \left\{x \mid \begin{cases} 2x+4>0, \\ x+3<0 \end{cases}\right\}, \text{因此①正确;}$$

② $\{y \mid y = 2x^2 + 1\} = \{y \mid y \geq 1\}$, $\{x \mid y = 2x^2 + 1\} = \mathbf{R}$, $\therefore \{y \mid y = 2x^2 + 1\} \neq \{x \mid y = 2x^2 + 1\}$, 因此②错误;

$$\textcircled{3} \left\{x \mid x = \frac{1-(-1)^n}{2}, n \in \mathbf{N}\right\} = \{0, 1\}, \{x \mid -1 < x < 2, x \in \mathbf{N}\} = \{0, 1\},$$

$$\therefore \left\{x \mid x = \frac{1-(-1)^n}{2}, n \in \mathbf{N}\right\} = \{x \mid -1 < x < 2, x \in \mathbf{N}\}, \text{因此③正确;}$$

$$\textcircled{4} \{(x, y) \mid y = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}\} = \{(1, 0)\}, \therefore \{(x, y) \mid y = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}\} \neq \{0, 1\}. \text{因此④错误.}$$

8. C 【解析】Q 表示有理数集, N 表示自然数集, Z 表示整数集, R 表示实数集, 故 $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$. 故 C 正确.

9. C 【解析】 $\{1, 3\}$ 是集合的一个元素, 所以 $\{1, 3\} \in \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{1, 3\}\}$, 因为 $1, 3 \in \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{1, 3\}\}$, 所以 $\{1, 3\} \subseteq \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{1, 3\}\}$. 综上, 填入 \subseteq 与 \in 都可以, 故 C 正确.

易错警示 混淆 \subseteq 与 \in 的含义

需要注意, \in 代表元素与集合之间的关系, \subseteq 代表集合与集合的关系, 在判断时一定要做好区分.

10. A 【解析】当 n 是偶数时, 设 $n = 2k, k \in \mathbf{Z}$, 则 $s = 2n + 1 = 4k + 1, k \in \mathbf{Z}$;
当 n 是奇数时, 设 $n = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}$, 则 $s = 2n + 1 = 4k + 3, k \in \mathbf{Z}$, 则 $T \subsetneq S$. 故 A 正确.

11. A 【解析】①空集是它本身的子

集, 故错误;

②空集是任何一个非空集合的真子集, 故错误;

③空集只有一个子集, 是它本身, 故错误;

④若集合 $B \subseteq A$, 则不在集合 A 中的元素一定不在集合 B 中, 故正确. 综上, 只有④正确. 故 A 正确.

12. C 【解析】 \emptyset 与 $\{0\}$ 之间应该是包含或不包含关系, 不能用属于的符号表示, 故 A 错误; $\{0\}$ 含有一个元素 0, 故它与空集不等, 故 B 错误; 空集是不含任何元素的集合, 故 C 正确, D 错误.

易错警示 混淆 $\emptyset, \{0\}, \emptyset$ 与 $\{\emptyset\}$ 的关系

	\emptyset 与 0	\emptyset 与 $\{0\}$
相同点	都表示无的意思	都是集合
不同点	\emptyset 是集合; 0 是实数	\emptyset 不含任何元素; $\{0\}$ 含一个元素 0
关系	$0 \notin \emptyset$	$\emptyset \subsetneq \{0\}$
\emptyset 与 $\{\emptyset\}$		
相同点	都是集合	
不同点	\emptyset 不含任何元素; $\{\emptyset\}$ 含一个元素, 该元素是 \emptyset	
关系	$\emptyset \subsetneq \{\emptyset\}$ 或 $\emptyset \in \{\emptyset\}$	

13. D 【解析】 $\because -1 - x < 0, \therefore x > -1$,
 \therefore 集合 $A = \{x \mid x > -1\}, \therefore 0 > -1$,
 $\therefore \{0\} \subseteq A$. 故 D 正确.

重难上分

1. C 【解析】 $A = \{x \mid x \leq 2, x \in \mathbf{N}\} = \{0, 1, 2\}$, 元素个数为 3, 故集合 A 的非空真子集个数为 $2^3 - 2 = 6$. 故 C 正确.

2. B 【解析】因为集合 $A = \{-1, 1,$

$2, 3\}$, 所以集合 $B = \{y \mid y = x^2, x \in A\} = \{1, 4, 9\}$, 又因为集合 B 中有 3 个元素, 所以集合 B 的子集个数为 $2^3 = 8$. 故 B 正确.

3. B 【解析】因为 $\{2\} \subseteq A$, 所以集合 A 中包含元素 2, 又因为 A 是 $\{1, 2, 3\}$ 的真子集, 所以满足条件的集合 A 有 $\{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}$, 共 3 个. 故 B 正确.

4. D 【解析】由于集合 $M = \{x \mid ax^2 + 2x - 3 = 0\}$ 至多有 1 个真子集, 设集合中元素个数为 n , 根据公式有 $2^n - 1 = 1$ 或 $2^n - 1 = 0$, 解得 $n = 1$ 或 $n = 0$, 则集合 M 中的元素个数至多 1 个, 故 $M = \emptyset$ 或者 M 为单元素集.

①当 $M = \emptyset$ 时, 则 $a \neq 0$ 且 $\Delta = 4 + 12a < 0$, 解得 $a < -\frac{1}{3}$;

②当 M 为单元素集时, 则 M 中只有 1 个元素. 若 $a = 0$, 则 $M = \{x \mid 2x - 3 = 0\} = \{\frac{3}{2}\}$ 符合题意;

若 $a \neq 0$, 则 $\Delta = 4 + 12a = 0$, 解得 $a = -\frac{1}{3}$, 此时 $M =$

$\left\{x \mid -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3 = 0\right\} = \{3\}$ 符合题意. 综上, a 的取值范围是

$\left\{a \mid a \leq -\frac{1}{3} \text{ 或 } a = 0\right\}$. 故 D 正确.

5. C 【解析】由 $\{a^2, 0, -1\} = \{a, b, 0\}$, 可得 $a = -1$ 或 $b = -1$.

①若 $a = -1$, 则 $b = a^2 = 1$, 此时 $a - b = -2$;

②若 $b = -1$, 则 $a^2 = a$, 解得 $a = 1$ ($a = 0$ 不符合题意, 舍去), 此时 $a - b = 2$.

综上所述, $a - b = 2$ 或 $a - b = -2$. 故 C 正确.

6. 【解】根据集合相等的条件及分式 $\frac{b}{a}$ 有意义可知 $a \neq 0$, $\frac{b}{a} = 0$, 则 $b = 0$, 代入集合得 $\{a, 0, 1\} = \{a^2, a, 0\}$, 则 $\begin{cases} a^2 = 1, \\ a \neq 1, \end{cases}$ 解得 $a = -1$. 因此 $a^{2019} + b^{2019} = (-1)^{2019} + 0^{2019} = -1$.

7. 【解】(1) 集合 $A = \{x | x^2 - ax + b = 0, a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}\}$. 若 $A = \{1\}$, 则 $\begin{cases} 1 - a + b = 0, \\ \Delta = (-a)^2 - 4b = 0, \end{cases}$ 解得 $a = 2$, $b = 1$.

(2) $\because B = \{x \in \mathbf{Z} | -3 < x < 0\} = \{-2, -1\}$, 且 $A = B$, $\therefore \begin{cases} 4 + 2a + b = 0, \\ 1 + a + b = 0, \end{cases}$ 解得 $a = -3, b = 2$.

8. B 【解析】依题意, $a - 2 = 0$ 或 $2a - 2 = 0$.

当 $a - 2 = 0$ 时, 解得 $a = 2$, 此时 $A = \{0, -2\}$, $B = \{1, 0, 2\}$, 不符合题意;

当 $2a - 2 = 0$ 时, 解得 $a = 1$, 此时 $A = \{0, -1\}$, $B = \{1, -1, 0\}$, 符合题意. 故 B 正确.

9. D 【解析】 $\because A = \{x | x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$, 又 $\because B \subseteq A$, \therefore 当 $a = 0$ 时, $ax = 1$ 无解, 故 $B = \emptyset$, 满足条件; 若 $B \neq \emptyset$, 则 $B = \{-1\}$ 或 $B = \{1\}$, 即 $a = -1$ 或 $a = 1$. 故满足条件的实数 $a \in \{0, 1, -1\}$. 故 D 正确.

易错警示 忽略对空集的讨论而致错

在子集问题中, 易忽视空集的特殊性而致错, 空集是任何集合的子集, 是任何非空集合的真子集. 在解题过程中, 若未指明集合为非空集合, 则要考虑空集的情况.

10. 【解】(1) $\because M = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$, $N = \{x | a + 1 \leq x \leq 2a - 1\}$, $M \subseteq N$, $\therefore \begin{cases} -2 \geq a + 1, \\ 5 \leq 2a - 1, \\ 2a - 1 \geq a + 1, \end{cases}$ 无解. \therefore 实数 a 的取值范围是 \emptyset .

(2) $\because M = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$, $N = \{x | a + 1 \leq x \leq 2a - 1\}$, $M \supseteq N$, \therefore 当 $N = \emptyset$ 时, $a + 1 > 2a - 1$, 解得 $a < 2$, 成立; 当 $N \neq \emptyset$ 时, 则 $\begin{cases} -2 \leq a + 1, \\ 5 \geq 2a - 1, \\ 2a - 1 \geq a + 1, \end{cases}$ 解得 $2 \leq a \leq 3$. 综上, a 的取值范围为 $(-\infty, 3]$.

1.3 集合的基本运算

基础满分

1. C 【解析】 \because 集合 $A = \{x | x = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x | -2 < x < 4\}$, $\therefore A \cap B = \{-1, 1, 3\}$. 故 C 正确.

2. A 【解析】由 $|x| < 3$ 解得 $-3 < x < 3$, 所以 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, 所以 $A \cap B = \{-2, -1, 0, 2\}$. 故 A 正确.

3. C 【解析】由 $y = 2x, x \in \mathbf{R}$, 得到 $y \in \mathbf{R}$, 即 $A = (-\infty, +\infty)$; 由 B 中 $y = x^2 \geq 0$, 得到 $B = [0, +\infty)$, 所以 $A \cap B = [0, +\infty)$, 故 C 正确.

4. D 【解析】因为 $A = \{x | |x| < 2, x \in \mathbf{Z}\} = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-2, 0, 1, 2\}$, 所以 $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. 故 D 正确.

5. A 【解析】集合 $M = \{x | -1 < x < 2\}$, $N = \{x | y = \sqrt{x}\} = \{x | x \geq 0\}$, 则 $M \cup N = \{x | x > -1\}$. 故 A 正确.

6. D 【解析】 $M = \left\{x \mid \frac{x}{4} \in \mathbf{N}_+\right\}$ 且 $\frac{x}{6} \in \mathbf{N}_+$ $\left\{x \mid x = 12k, k \in \mathbf{N}_+\right\}$,

$N = \left\{x \mid \frac{x}{24} \in \mathbf{Z}\right\} = \{x | x = 24m, m \in \mathbf{Z}\}$, 故 A 错误, C 错误; 当 $x = -12$ 时, $\frac{-12}{12} = -1$, 既不在集合 M 中, 也不在集合 N 中, 故 B 错误;

当元素满足为 24 的正整数倍时, 必满足为 12 的正整数倍, 故 $M \cap N = \left\{x \mid \frac{x}{24} \in \mathbf{N}_+\right\}$, 故 D 正确.

7. D 【解析】 $\because \{x \in \mathbf{R} | x^3 = x\} = \{-1, 0, 1\}$, \therefore 满足 $\{0, 1\} \cup X = \{-1, 0, 1\}$ 的 X 为: $\{-1\}$, $\{-1, 0\}$, $\{-1, 1\}$, $\{-1, 0, 1\}$, 共 4 个. 故 D 正确.

8. $\{-1, 3\}$ (答案不唯一) 【解析】根据题意, 只要是满足 $\{-1, 3\} \subseteq B \subseteq \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ 的集合即可, 所以 $B = \{-1, 3\}$ (答案不唯一).

9. C 【解析】因为 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$, 所以 $\complement_U A = \{3, 4\}$. 故 C 正确.

10. C 【解析】全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 M 满足 $\complement_U M = \{1, 2, 3\}$, 则 $M = \{4, 5\}$, 所以 $2 \notin M, 3 \notin M, 4 \in M, 5 \in M$. 故 C 正确.

11. C 【解析】 \because 全集 $U = [0, 1]$, 集合 $A = \{1\}$, $\therefore \complement_U A = [0, 1)$. 故 C 正确.

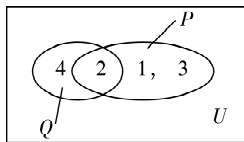
12. C 【解析】 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{y | y = x^2, x \in A\} = \{0, 1, 4\}$, $\complement_M B = \{2, 3, 5, 6\}$. 故 C 正确.

13. A 【解析】由全集 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $\complement_U A = \{2, 3\}$, 得 $A = \{1, 4\}$, 即 $x = 1, x = 4$ 是方程 $x^2 - 5x + m = 0$ 的两

个根, 于是 $\begin{cases} \Delta = (-5)^2 - 4m > 0, \\ 1 - 5 + m = 0, \\ 16 - 20 + m = 0, \end{cases}$ 解

得 $m=4$, 所以 m 的值为 4. 故 A 正确.

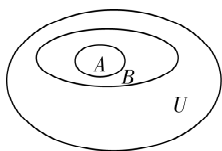
14. B 【解析】因为 $U = \{x | 0 \leq x < 5, x \in \mathbf{N}_+\} = \{1, 2, 3, 4\}$, 如下图



所示: 所以 $(\complement_U P) \cup Q = \{4\} \cup \{2, 4\} = \{2, 4\}$. 故 B 正确.

15. B 【解析】因为 $A = \{x | x < 0\}$, $B = \{x | -2 < x < 1\}$, 所以 $\complement_{\mathbf{R}} A = \{x | x \geq 0\}$, 则 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = \{x | 0 \leq x < 1\}$. 故 B 正确.

16. C 【解析】如下图所示, 全集为 U , 集合 $A \subseteq B$, $A \cap B = A$, 故 A 正确; $A \cap \complement_U A = \emptyset$, 故 B 正确; $B \cap \complement_U A$ 不一定等于 B , 但当 $A = \emptyset$, $B = \emptyset$ 时, $B \cap \complement_U A = B$, 故 C 错误; $A \cup B = B$, 故 D 正确.



17. A 【解析】由题意得 $M \cup N = \{x | x < 2\}$, 又 $\because U = \mathbf{R}, \therefore \complement_U (M \cup N) = \{x | x \geq 2\}$. 故 A 正确.

18. 【解】(1) 根据题意, $U = \mathbf{Z}$, 则可得 $\complement_U B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 则 $A \cap (\complement_U B) = \{1, 2, 3, 4\}$.

(2) 由题意可得, $A \cup B = \{x | x \leq 4 \text{ 或 } x > 5\}$, 又 $\complement_U A = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 4\}$, 则 $(\complement_U A) \cap B = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 5\}$.

19. A 【解析】题图中阴影部分表示的集合为 $B \cap (\complement_U A)$, $\because A = \{x | 2 < x < 6\}$, $B = \{x | 1 < x < 4\}$, $\therefore \complement_U A = \{x | x \geq 6 \text{ 或 } x \leq 2\}$, 则 $B \cap$

$(\complement_U A) = \{x | 1 < x \leq 2\}$. 故 A 正确.

20. D 【解析】依题意, $A = \{x | -4 < x \leq 3\}$, $B = \{x | x < 1\}$, 由题中 Venn 图知, 阴影部分表示的集合是 $A \cap B$, 所以 $A \cap B = \{x | -4 < x < 1\}$. 故 D 正确.

21. B 【解析】由题意, 题图中非阴影部分所表示的集合是 $M \cup N$, 所以题图中阴影部分所表示的集合为 $M \cup N$ 的补集, 即题图中阴影部分所表示的集合为 $\complement_U (M \cup N)$. 故 B 正确.

22. 27 9 【解析】由题意可知,
$$\begin{cases} 28+a+b+6=51, \\ 35+a+6+c=60, \\ 26+b+6+c=50, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=9, \\ b=8, \\ c=10, \end{cases}$$
 $b+c=27, a=9$.

23. $(2, \frac{5}{2}]$ 【解析】因为区域 I, II, III 表示的集合均不是空集, 则
$$\begin{cases} 1^2-2a \times 1+4 \geq 0, \\ 2^2-2a \times 2+4 < 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 1^2-2a \times 1+4 < 0, \\ 2^2-2a \times 2+4 \geq 0, \end{cases}$$
 解得 $2 < a \leq \frac{5}{2}$, 所以实数 a 的取值范围是 $(2, \frac{5}{2}]$.

重难上分

1. D 【解析】因为 $A \cap B = \{2\}$, 所以 $2 \in B$, $4-10-m=0$, 解得 $m=-6$, 则 $B = \{x | x^2-5x+6=0\} = \{2, 3\}$. 故 D 正确.

2. C 【解析】 $y = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1 \geq -1$, 所以 $N = \{y | y \geq -1\}$, 因为 $M = \{x | x < m\}$ 且 $M \cap N = \emptyset$, 所以 $m \leq -1$. 故 C 正确.

3. B 【解析】 $A \cup B = A$, 则 $B \subseteq A$. 当 $a+2=3$, 即 $a=1$ 时, 集合 A 不满足元素的互异性, 舍去. 当 $a+2=a^2$ 时, $a=2$ 或 $a=-1$,

当 $a=2$ 时, $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{1, 4\}$, 满足题意;

当 $a=-1$ 时, 集合 B 不满足元素的互异性, 舍去.

综上所述, $a=2$, 满足 $A \cup B = A$ 的实数 a 的个数为 1. 故 B 正确.

4. C 【解析】因为 $A = \{x | x^2 + px - 6 = 0\}$, $B = \{x | x^2 + qx + 2 = 0\}$, 且 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) = \{2\}$, 所以 $x=2$ 是方程 $x^2 + px - 6 = 0$ 的解, 即 $4+2p-6=0$, 解得 $p=1$, 所以 $A = \{-3, 2\}$, 所以 $-3 \in B$, 即 $x=-3$ 是方程 $x^2 + qx + 2 = 0$ 的解, 即 $9-3q+2=0, q=\frac{11}{3}$, 所以 $p+q=1+\frac{11}{3}=\frac{14}{3}$. 故 C 正确.

5. 【解】(1) 当 $m=3$ 时, $A = \{x | 4 \leq x \leq 8\}$, $B = \{x | 1 \leq x \leq 10\}$, $A \cup B = \{x | 1 \leq x \leq 10\}$, $\complement_{\mathbf{R}} A = \{x | x < 4 \text{ 或 } x > 8\}$, $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = \{x | 1 \leq x < 4 \text{ 或 } 8 < x \leq 10\}$.

(2) $\because A \cup B = B, \therefore A \subseteq B, \therefore$ 当 $A = \emptyset$ 时, $m+1 > 3m-1$, 解得 $m < 1$;

当 $A \neq \emptyset$ 时, $1 \leq m+1 \leq 3m-1 \leq 10$, 解得 $1 \leq m \leq \frac{11}{3}$, 即 $m < 1$ 或

$1 \leq m \leq \frac{11}{3}$, 故实数 m 的取值范围为 $(-\infty, \frac{11}{3}]$.

6. 【解】(1) 因为 $A = \{x | x^2 - 2x = 0\} = \{0, 2\}$, 由 $A \cap B = \{2\}$ 可得 $2 \in B$, 则 $2^2 + 2(m-1) - m^2 + 1 = 0$, 化简可得 $m^2 - 2m - 3 = 0$, 解得 $m = -1$ 或 $m = 3$.

当 $m=-1$ 时, $x^2 + (m-1)x - m^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0$, 则 $B = \{0, 2\}$, 此时 $A \cap B = \{0, 2\}$, 不满足题意;

当 $m=3$ 时, $x^2 + (m-1)x - m^2 + 1 =$

$0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$, 则 $B = \{-4, 2\}$, 此时 $A \cap B = \{2\}$, 满足题意. 所以 $m = 3$.

(2) 由 $A \cap B = B$, 可得 $B \subseteq A$, 当 $B = \emptyset$ 时, $\Delta = (m-1)^2 + 4(m^2 - 1) < 0$, 化简可得 $5m^2 - 2m - 3 < 0$, 解得 $-\frac{3}{5} < m < 1$. 当 B 为单元素集合时, $\Delta = (m-1)^2 + 4(m^2 - 1) = 0$, 解得 $m = -\frac{3}{5}$ 或 $m = 1$.

当 $m = -\frac{3}{5}$ 时, $x^2 + (m-1)x - m^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{8}{5}x + \frac{16}{25} = 0$, 解得 $x = \frac{4}{5}$, 即 $B = \{\frac{4}{5}\}$, 不满足 $B \subseteq A$.

当 $m = 1$ 时, $x^2 + (m-1)x - m^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 0$, 解得 $x = 0$, 即 $B = \{0\}$, 满足 $B \subseteq A$;

当 B 为双元素集合时, 则其两个元素分别是 0, 2, 由根与系数的关

$$\text{系得} \begin{cases} \Delta = (m-1)^2 + 4(m^2 - 1) > 0, \\ -(m-1) = 0+2, \\ -m^2 + 1 = 0 \times 2, \end{cases}$$

解得 $m = -1$, 此时 $x^2 + (m-1)x - m^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0$, 即 $B = \{0, 2\}$, 满足 $B \subseteq A$.

综上所述, $m \in \left(-\frac{3}{5}, 1\right] \cup \{-1\}$.

7. $\{a | a \leq 1-2\sqrt{2} \text{ 或 } a \geq 2\}$ 【解析】

若 $A = \{x | x^2 + ax + 1 = 0\} = \emptyset$, 则 $\Delta = a^2 - 4 < 0$, 解得 $-2 < a < 2$.

若 $B = \{x | x^2 + (a-1)x + 2 = 0\} = \emptyset$, 则 $\Delta_1 = (a-1)^2 - 4 \times 2 < 0$, 解得 $1-2\sqrt{2} < a < 1+2\sqrt{2}$.

若 A, B 均为空集, 此时 $\begin{cases} -2 < a < 2, \\ 1-2\sqrt{2} < a < 1+2\sqrt{2}, \end{cases}$ 即 $1-2\sqrt{2} < a < 2$.

2. 因为 A, B 中至少有一个非空, 所以 $a \leq 1-2\sqrt{2}$ 或 $a \geq 2$, 即实数 a 的取值范围是 $\{a | a \leq 1-2\sqrt{2} \text{ 或 } a \geq 2\}$.

8. 【解】(1) 因为 $A = \{x | x \leq -3 \text{ 或 } x \geq 2\}$, $B = \{x | 1 < x < 5\}$, 所以 $\complement_{\mathbb{R}} A = \{x | -3 < x < 2\}$, 故 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cup B = \{x | -3 < x < 5\}$.

(2) 若 $B \cap C = C$, 则 $C \subseteq B$, 当 $C = \emptyset$ 时, $m-1 > 2m$, 即 $m < -1$;

当 $C \neq \emptyset$ 时, $\begin{cases} m-1 \leq 2m, \\ m-1 > 1, \\ 2m < 5, \end{cases}$ 解得

$2 < m < \frac{5}{2}$, 此时 m 的取值范围为

$(-\infty, -1) \cup \left(2, \frac{5}{2}\right)$, 结合补集思想,

可知要满足 $B \cap C \neq C$, 则 m 的取值范围为 $[-1, 2] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

§1 考点训练

1. C 【解析】因为 $A = \{x | x^2 - 1 = 0\} = \{-1, 1\}$, 所以 $A \subseteq \{-1, 1\}$ 成立. 故 C 正确.

2. D 【解析】因为集合 $A = \{4, a^2 + 2a, 2a+1\}$, 且 $3 \in A$, 所以 $a^2 + 2a = 3$ 或 $2a+1 = 3$, 解得 $a = 1$ 或 $a = -3$.

当 $a = 1$ 时, $a^2 + 2a = 2a+1 = 3$, 集合 A 中的元素不满足互异性;

当 $a = -3$ 时, $A = \{4, 3, -5\}$, 符合题意. 综上, $a = -3$. 故 D 正确.

3. C 【解析】集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} | x < 4\}$, 表示小于 4 的所有整数, $B \subseteq \mathbb{N}$, 表示 B 为自然数集的子集, 则 $B \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$, 故 A 正确;

$A \cap B$ 可能是 $\{1, 2, 3\}$, 故 B 正确;

由于 -1 不是自然数, 故集合 $A \cap B$ 不可能是 $\{-1, 1\}$, 故 C 错误;

0 是自然数, 则 0 可能属于 B , 故 D 正确.

4. C 【解析】题图中阴影部分表示的集合中的元素在集合 A 中, 但不在集合 B 中, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | x < 5\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $A \cap B = \{0, 1, 2\}$, 所以阴影部分表示的集合为 $\{-2, -1\}$. 故 C 正确.

5. AC 【解析】集合 $A = \{y | y = x^2 + 1\} = \{y | y \geq 1\}$, 表示数集, 集合 $B = \{(x, y) | y = x^2 + 1\}$, 表示点集, $\because 2 = 1^2 + 1, \therefore (1, 2) \in B$, 故 A 正确;

$\because A \cap B = \emptyset, \therefore A \neq B$, 故 B 错误;

$\because 0 \notin \{y | y \geq 1\}, \therefore 0 \notin A$, 故 C 正确;

$2 \notin B$, 故 D 错误.

6. AD 【解析】因为 $x \in \mathbb{N}, \frac{6}{x} \in \mathbb{N}$,

所以 $x = 1, 2, 3, 6$, 所以 $Q = \{1, 2, 3, 6\}$, P 的子集有 $2^3 = 8$ (个), 故 A 正确;

$U = P \cup Q = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, 所以

$\frac{1}{2} \notin U$, 故 B 错误;

$\complement_U P = \{2, 6\} \neq Q$, 故 C 错误;

$U = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ 中的元素个数为 5, 故 D 正确.

7. B 【解析】已知 $\{s\} = \{x | tx^2 - 4x + 1 = 0\}$, 则当 $t = 0$ 时, $-4x + 1 = 0$, 即

$x = \frac{1}{4}$, 即 $t = 0, s = \frac{1}{4}$, 即 $s+t = \frac{1}{4}$;

当 $t \neq 0$ 时, 一元二次方程 $tx^2 - 4x + 1 = 0$ 有两个相等的解, 则 $\Delta = 16 -$

$4t = 0$, 即 $t = 4, s = \frac{1}{2}$, 则 $s+t = \frac{1}{2} +$

$4 = \frac{9}{2}$, 综上, $s+t = \frac{1}{4}$ 或 $s+t = \frac{9}{2}$. 故

B 正确.

8.7 【解析】∵ 集合 A 满足 $\{1\} \subseteq A \subsetneq \{1, 2, 3, 4\}$, ∴ $A = \{1\}$ 或 $\{1, 2\}$ 或 $\{1, 3\}$ 或 $\{1, 4\}$ 或 $\{1, 2, 3\}$ 或 $\{1, 2, 4\}$ 或 $\{1, 3, 4\}$, ∴ 满足条件的集合 A 的个数为 7.

【一题多解】利用公式知 A 的个数为 $2^3 - 1 = 7$.

9. $\left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right\}$ 【解析】∵ $A = \{x | x^2 - 8x + 15 = 0\}$, ∴ $A = \{3, 5\}$, 又∵ $B = \{x | ax - 1 = 0\}$, ∴ ①当 $B = \emptyset$ 时, $a = 0$, 显然 $B \subseteq A$;

②当 $B \neq \emptyset$ 时, $B = \left\{\frac{1}{a}\right\}$, 由于 $B \subseteq A$, ∴ $\frac{1}{a} = 3$ 或 $\frac{1}{a} = 5$, 即 $a = \frac{1}{3}$ 或 $a = \frac{1}{5}$.

综上所述, a 构成的集合是 $\left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right\}$.

10. 【解】(1) 因为集合 $A = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, 所以 $\complement_{\mathbb{R}} A = \{x | x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$, 又 $B = \{x | a \leq x \leq 3 - 2a\}$, $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cup B = \mathbb{R}$, 所以 $\begin{cases} 3 - 2a \geq a, \\ a \leq 0, \\ 3 - 2a \geq 2, \end{cases}$ 解得 $a \leq 0$, 所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 0]$.

(2) 若 $A \cap B = B$, 则 $B \subseteq A$, 当 $B = \emptyset$ 时, $3 - 2a < a$, 解得 $a > 1$;

当 $B \neq \emptyset$ 时, 有 $a \leq 1$, 要使 $B \subseteq A$, 则 $\begin{cases} a \geq 0, \\ 3 - 2a \leq 2, \end{cases}$ 解得 $a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

综上可知, 实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, 所以 $A \cap B \neq B$ 时 a 的

取值范围是 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 在 \mathbb{R} 中的补集, 即 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, 即实数 a 的

取值范围为 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

11. 【解】(1) ∵ $A = \{x | -6 < x < 10\}$, $B = \{x | 3m - 1 < x < 2m + 1\}$, 又 $A \cup B = A$, ∴ $B \subseteq A$, ①当 $B = \emptyset$ 时, 满足 $B \subseteq A$, ∴ $3m - 1 \geq 2m + 1$, ∴ $m \geq 2$;

②当 $B \neq \emptyset$ 时, 又 $B \subseteq A$, $\begin{cases} m < 2, \\ 3m - 1 \geq -6, \\ 2m + 1 \leq 10, \end{cases}$ ∴ $-\frac{5}{3} \leq m < 2$, 综合①②可得, 实数 m 的取值范围为 $\left[-\frac{5}{3}, +\infty\right)$.

(2) ∵ $A \cap B = \{x | a < x < b\}$ 且 $b - a = 2$, ∴ $B \neq \emptyset$, ∴ $3m - 1 < 2m + 1$, ∴ $m < 2$, ∴ $3m - 1 < 5$, $2m + 1 < 5$, ∴ $A \cap B = B = \{x | 3m - 1 < x < 2m + 1$, 且 $m < 2\}$, 或 $A \cap B = \{x | -6 < x < 2m + 1$, 且 $m < 2\}$. ①当 $A \cap B = B = \{x | 3m - 1 < x < 2m + 1$, 且 $m < 2\}$ 时, 又 $A \cap B = \{x | a < x < b\}$ 且 $b - a = 2$,

$\begin{cases} m < 2, \\ 3m - 1 \geq -6, \\ 2m + 1 - (3m - 1) = 2, \end{cases}$ ∴ $m = 0$;

②当 $A \cap B = \{x | -6 < x < 2m + 1$, 且 $m < 2\}$ 时, 又 $A \cap B = \{x | a < x < b\}$ 且 $b - a = 2$,

$\begin{cases} m < 2, \\ 3m - 1 < -6, \\ 2m + 1 - (-6) = 2, \end{cases}$ ∴ $m = -\frac{5}{2}$,

综合①②可得, 实数 m 的取值范围为 $\left\{-\frac{5}{2}, 0\right\}$.

985 冲刺专题一 集合新定义问题

1. C 【解析】由于 $M = \{x | 0 \leq x \leq 3\}$, $N = \{x | x > 2\}$, 所以 $M \cup N = \{x | x \geq 0\}$, $M \cap N = \{x | 2 < x \leq 3\}$, 所以 $M \ast$

$N = \{x | 0 \leq x \leq 2 \text{ 或 } x > 3\}$. 故 C 正确.

2. A 【解析】若 $M = \{-1, 0, 1, 3\}$, $N = \{1, 3, 5\}$, 则 $M - N = \{-1, 0\}$, $N - M = \{5\}$, 则 $(M - N) \cup (N - M) = \{-1, 0, 5\}$, 所以 $|(M - N) \cup (N - M)| = 3$. 故 A 正确.

3. C 【解析】由题知集合 A 含有 -2, 1 两个元素, B 含有 -1, 2 两个元素, 得 $A = \{-2, 1\}$, $B = \{-1, 2\}$, 又∵ $-2 \times (-1) = 2$, $-2 \times 2 = -4$, $1 \times (-1) = -1$, $1 \times 2 = 2$, ∴ $A \odot B = \{-4, -1, 2\}$, ∴ $-4 \times (-1) \times 2 = 8$. 故 C 正确.

4. A 【解析】 $8^1 = 8$, 所以 8 是自恋数; $2^2 + 3^2 = 13 \neq 23$, 所以 23 不是自恋数; $8^2 + 1^2 = 65 \neq 81$, 所以 81 不是自恋数; $1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$, 所以 153 是自恋数; $2^3 + 5^3 + 4^3 = 197 \neq 254$, 所以 254 不是自恋数; $3^3 + 7^3 + 0^3 = 370$, 所以 370 是自恋数. 所以集合 $B = \{8, 153, 370\}$, 所以 B 的真子集个数为 $2^3 - 1 = 7$. 故 A 正确.

5. C 【解析】由题意, 对于任意两个非空数集, $d_{AB} \geq 0$, 当 $\min A = \min B$ 时, 说明集合 A, B 中最小的元素相同, 故 $d_{AB} = 0$, 故①正确; 取 $A = \{1, 2\}$, $B = \{0, 2\}$, 满足 $\min A > \min B$, 但 $d_{AB} = 0$, 故②错误;

若 $d_{AB} = 0$, 则集合 A, B 中存在相同的元素, 故 $A \cap B \neq \emptyset$, 故③正确;

令 $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{3, 4\}$, 则 $d_{AB} = 0$, $d_{BC} = 0$, $d_{AC} = 1$, 但是 $d_{AB} + d_{BC} < d_{AC}$, 所以 $d_{AB} + d_{BC} \geq d_{AC}$ 不成立, 故④错误.

综上所述, 真命题只有①③共 2

个. 故 C 正确.

6. BCD 【解析】 $A \otimes B = \{z | z = (x+y) \cdot (x-y), x \in A, y \in B\}$, $A = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$, $B = \{1, \sqrt{2}\}$, 当 $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{2}$ 时, $z = 0$; 当 $x = \sqrt{2}, y = 1$ 时, $z = 1$; 当 $x = \sqrt{3}, y = 1$ 时, $z = 2$; 当 $x = \sqrt{3}, y = \sqrt{2}$ 时, $z = 1$, 故 A 错误, B 正确; $A \otimes B = \{0, 1, 2\}$, 故 C, D 正确.

7. 【解】由题意知, 集合 $A = \{(1, 0), (0, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}$, 集合 $B = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, -1), (0, -2), (1, 0), (2, 0), (-1, 0), (-2, 0), (1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (1, -1), (-1, 1), (1, -2), (-2, 1), (2, -1), (-2, -2), (-1, -1), (2, -2), (-2, -1), (-2, 2), (-1, 2), (-1, -2)\}$, 因为集合 $A \oplus B = \{(x_1 + x_2, y_1 + y_2) | (x_1, y_1) \in A, (x_2, y_2) \in B\}$, 所以集合 $A \oplus B = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, -1), (0, -2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, -1), (1, -2), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, -1), (2, -2), (-1, -2), (-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (-2, -2), (-2, -1), (-2, 0), (-2, 1), (-2, 2), (-2, 3), (-2, -3), (0, -3), (2, -3), (-1, 3), (-1, -3), (1, 3), (2, 3), (0, 3), (3, -1), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, -2), (-3, 2), (-3, 1), (1, -3), (-3, -1), (-3, 0), (-3, -2)\}$, 所以 $A \oplus B$ 含有 45 个元素.

8. (1) 【解】因为集合 $A = \{2, 5\}$, $S = \{x | x = a + b, a, b \in A\}$, $T = \{x | x = |a - b|, a, b \in A\}$, 所以由 $2 + 2 = 4$, $2 + 5 = 7$, $5 + 5 = 10$, 可得 $S = \{4, 7$,

$10\}$. 由于 $|2 - 2| = 0$, $|5 - 5| = 0$, $|2 - 5| = 3$, 可得 $T = \{0, 3\}$.

(2) 【证明】由于集合 $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 则集合 T 的元素在 $0, x_2 - x_1, x_3 - x_1, x_4 - x_1, x_3 - x_2, x_4 - x_2, x_4 - x_3$ 中, 且 $0 < x_2 - x_1 < x_3 - x_1 < x_4 - x_1, x_4 - x_3 < x_4 - x_2 < x_4 - x_1$, 而 $A = T$, 故 A 中最大元素 x_4 必在 T 中, 而 $x_4 - x_1$ 为 7 个元素中的最大者, 故 $x_4 = x_4 - x_1$, 即 $x_1 = 0$, 故 $A = \{0, x_2, x_3, x_4\}$, 故 T 中的 4 个元素为 $0, x_2, x_3, x_4$, 又 $x_3 - x_2, x_4 - x_2, x_4 - x_3$ 与 x_2, x_3, x_4 重复, 而 $0 < x_3 - x_2 < x_3$, 故 $x_3 - x_2 = x_2$, 即 $x_3 = 2x_2$, 而 $0 < x_4 - x_3 < x_4$, 故 $x_4 - x_3 = x_2$ 或 $x_4 - x_3 = x_3$. 若 $x_4 = 2x_3 = 4x_2$, 则 $A = \{0, x_2, 2x_2, 4x_2\}$, $4x_2 - x_2 = 3x_2 \notin T$, 与题设矛盾. 故 $x_4 - x_3 = x_2$, 即 $x_4 + x_1 = x_3 + x_2$.

§2 常用逻辑用语

2.1 必要条件与充分条件

基础满分

1. A 【解析】因为 $\{x | 0 < x < 2\} \not\subseteq \{x | -1 < x < 3\}$, 所以 p 是 q 的充分不必要条件. 故 A 正确.

2. A 【解析】因为当 $a > 1$ 时, 一定有 $a^2 > 1$; 当 $a^2 > 1$ 时, $a > 1$ 或 $a < -1$, 所以“ $a > 1$ ”是“ $a^2 > 1$ ”的充分不必要条件. 故 A 正确.

3. B 【解析】荀子的名言表明积跬步未必能至千里, 但要至千里必须积跬步, 故“积跬步”是“至千里”的必要不充分条件. 故 B 正确.

4. B 【解析】由题意, $a \neq 0$, 当 $a > 0$ 时, 不等式 $a^2 x^2 > 1$, 即 $x^2 > \frac{1}{a^2}$, 解得 $x < -\frac{1}{a}$ 或 $x > \frac{1}{a}$;

当 $a < 0$ 时, 不等式 $a^2 x^2 > 1$, 即 $x^2 > \frac{1}{a^2}$, 解得 $x < \frac{1}{a}$ 或 $x > -\frac{1}{a}$.

对于 p : 当 $a > 0$ 时, 为 $\{x | x < -\frac{1}{a} \text{ 或 } x > \frac{1}{a}\}$; 当 $a < 0$ 时, 为 $\{x | x < \frac{1}{a} \text{ 或 } x > -\frac{1}{a}\}$.

所以当 $x < -\frac{1}{a}$ 或 $x > \frac{1}{a}$ 时, 一定有 $a^2 x^2 > 1$, 但当 $a^2 x^2 > 1$ 时, 不一定有 $x < -\frac{1}{a}$ 或 $x > \frac{1}{a}$, 即 q 可以推出 p , 但 p 推不出 q , 则 p 是 q 的必要不充分条件. 故 B 正确.

5. CD 【解析】根据题意, $0 < \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow$

$x > 1$, 分析选项, 使不等式 $0 < \frac{1}{x} < 1$ 成立的一个充分不必要条件是 $x > 2$ 或 $1 < x < 3$. 故 CD 正确.

6. D 【解析】由 $x^2 \leq 4$ 得 $-2 \leq x \leq 2$, “ $-2 \leq x \leq 2$ ”是“ $x^2 \leq 4$ ”的充要条件, 故 A 错误;

$\{x | -2 \leq x \leq 2\}$ 与 $\{x | x < 2\}$ 之间没有包含关系, “ $x < 2$ ”是“ $x^2 \leq 4$ ”的既不充分也不必要条件, 故 B 错误;

$\{x | -2 \leq x \leq 2\}$ 是 $\{x | x \leq 2\}$ 的真子集, “ $x \leq 2$ ”是“ $x^2 \leq 4$ ”的必要不充分条件, 故 C 错误;

$\{x | 0 < x < 2\}$ 是 $\{x | -2 \leq x \leq 2\}$ 的真子集, “ $0 < x < 2$ ”是“ $x^2 \leq 4$ ”的充分不必要条件, 故 D 正确.

7. D 【解析】对于 A, 显然是充要条件, 故错误;

对于 B, 由“ $0 < x < 2$ ”可推出“ $0 < x < 4$ ”, 即为充分条件, 故错误;

对于 C, “ $x < 0$ ”不能推出“ $0 < x < 4$ ”,

“ $0 < x < 4$ ”也推不出“ $x < 0$ ”,即为既不充分也不必要条件,故错误;

对于 D,易知 $(0, 4) \subsetneq (-\infty, 4)$,所以“ $0 < x < 4$ ”的一个必要不充分条件为“ $x < 4$ ”,故正确.

8. (1)【解】由方程组 $\begin{cases} x^2+y=2, \\ 2x+y=3, \end{cases}$ 解得

$$\begin{cases} x=1, \\ y=1, \end{cases} \text{ 故 } M=\{(1, 1)\}, \text{ 则 } M \text{ 只有}$$

1 个元素,所以 M 有 2 个子集,即 $a=2$.

(2)【证明】①充分性:由(1)得 $a=2$,所以 $b^2+c^2-2(b+c)=bc-4$ 可化为 $b^2+c^2-a(b+c)=bc-a^2$,即 $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$,所以 $2a^2+2b^2+2c^2=2ab+2ac+2bc$,则 $(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2=0$,所以 $a-b=b-c=a-c=0$,即 $a=b=c$, $\triangle ABC$ 为等边三角形,充分性得证.

②必要性:因为 $\triangle ABC$ 为等边三角形,所以 $a=b=c$,由(1)得 $a=2$,所以 $a=b=c=2$,则 $b^2+c^2-2(b+c)=0$, $bc-4=0$,所以 $b^2+c^2-2(b+c)=bc-4$,必要性得证.

故 $\triangle ABC$ 为等边三角形的充要条件是 $b^2+c^2-2(b+c)=bc-4$.

7.4 重难点上分

1. B 【解析】当 $x=2$ 时, $m^2x^2-(m+3)x+4=0 \Leftrightarrow 2m^2-m-1=0$,解得 $m=-\frac{1}{2}$ 或 $m=1$,

①当 $m=1$ 时, $m^2x^2-(m+3)x+4=0 \Leftrightarrow x^2-4x+4=0$, $\therefore x=2$,此时“ $x=2$ ”是“ $m^2x^2-(m+3)x+4=0$ ”的充要条件;

②当 $m=-\frac{1}{2}$ 时, $m^2x^2-(m+3)x+4=0 \Leftrightarrow x^2-10x+16=0$, $\therefore x=2$ 或

$x=8$,此时“ $x=2$ ”是“ $m^2x^2-(m+3)x+4=0$ ”的充分不必要条件. 综上所述, $m=-\frac{1}{2}$. 故 B 正确.

2. (3, +∞) 【解析】由题意 p 是 q 的充分不必要条件,所以 $a>3$.

3. $[-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}]$ 【解析】设条件 p :

$$\{x|x^2+x-6=0\}=\{-3, 2\}=A, \text{ 条件}$$

$$q:\{x|mx+1=0\}=B,$$

$\therefore p$ 是 q 的必要不充分条件,
 $\therefore B \subsetneq A. \therefore B=\emptyset$ 或 $B=\{-3\}$ 或 $B=\{2\}$.

当 $m=0$ 时, $B=\emptyset$ 满足题意.

当 $m \neq 0$ 时,若 $B=\{-3\}$,则 $-3m+1=0$,解得 $m=\frac{1}{3}$;

若 $B=\{2\}$,则 $2m+1=0$,解得 $m=-\frac{1}{2}$.

综上所述, m 的取值集合是 $[-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}]$.

4. 【解】若“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充分不必要条件,则 $A \subsetneq B$,可知 $B \neq \emptyset$,故 $a>0$. 因为 $A=\{x|-1 < x < 3\}$,且 $B=\{x||x| < a\}=\{x|-a < x < a\}$,根据 $A \subsetneq B$,可得 $-1 \geq -a$ 且 $3 \leq a$,等号不同时取得,故 $a \geq 3$,实数 a 的取值范围是 $[3, +\infty)$.

5. 【解】(1)若存在实数 m ,使得 $x \in A$ 是 $x \in B$ 成立的充要条件,则 $A=B$. 故 $\begin{cases} 1-m=-3, \\ 3m-2=4, \end{cases}$ 无解,故不存在实数 m ,使得 $x \in A$ 是 $x \in B$ 成立的充要条件.

(2)因为 $m>1$,所以 $3m-2>1>1-m$,故 $B \neq \emptyset$.

选①:充分不必要条件.

由题意 $A \subsetneq B$,故 $\begin{cases} -3 \geq 1-m, \\ 4 \leq 3m-2, \end{cases}$ 等号

不同时取得,解得 $\begin{cases} m \geq 4, \\ m \geq 2, \end{cases}$ 故 $m \geq$

4,即 m 的取值范围为 $[4, +\infty)$.

选②:必要不充分条件.

由题意 $B \subsetneq A$,故 $\begin{cases} -3 \leq 1-m, \\ 4 \geq 3m-2, \end{cases}$ 等号

不同时取得,解得 $\begin{cases} m \leq 4, \\ m \leq 2, \end{cases}$ 故 $m \leq$

2,又 $m>1$,所以 m 的取值范围为 $(1, 2]$.

6. 【解】(1)当 $m=1$ 时, $A=\{x|1 < x < 2\}$, $\therefore B=\{x|\frac{3}{2} < x < 6\}$, $\therefore A \cup B=\{x|1 < x < 6\}$, $A \cap B=\{x|\frac{3}{2} < x < 2\}$.

(2) \because “ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”成立的必要不充分条件, \therefore 集合 A 是集合 B 的真子集, $\therefore m^2-m+1=(m-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$, $\therefore m < m^2+1$ 恒成立, \therefore 集合 $A \neq$

$$\emptyset, \therefore \begin{cases} m \leq \frac{3}{2}, \\ m^2+1 \geq 6, \end{cases} \text{ 且等号不同时成}$$

立解得 $m \leq -\sqrt{5}$. 故实数 m 的取值范围为 $(-\infty, -\sqrt{5}]$.

2.2 全称量词与存在量词

7.4 基础满分

1. C 【解析】A, B, D 中都含有全称量词,都是全称量词命题, C 不是全称量词命题. 故 C 正确.

2. ①③ 【解析】①任意一个自然数都是正整数,“任意一个”是全称量词,命题是全称量词命题;

②有的菱形是正方形,“有的”是存在量词,命题为存在量词命题;

③三角形的内角和是 180° , 指的是所有三角形, 命题是全称量词命题.

3. C 【解析】“ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 > 3$ ”为存在量词命题, 故与已知命题表述意义不同的为: 任何一个实数 x 都令 $x^2 > 3$ 成立. 故 C 正确.

4. 2 【解析】①和④隐含全部的意思, 是全称量词命题, ②和③含有存在量词, 是存在量词命题, 所以②③正确. 故存在量词命题的个数为 2.

5. C 【解析】存在集合 A 使得 $\emptyset \subsetneq A$, 是存在量词命题, 且是真命题. 故 C 正确.

6. AC 【解析】对于 A, 是全称量词命题, $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \geq 0$, 故是真命题, 故正确;

对于 B, 是真命题, 但不是全称量词命题, 故错误;

对于 C, 是全称量词命题, 根据菱形性质可得四条边都相等, 也是真命题, 故正确;

对于 D, 是真命题, 但不是全称量词命题, 故错误.

7. AC 【解析】当 $x = 3$ 时, 满足 $x^2 - 2x - 3 = 0$, 故 A 是真命题;

当 $a = -1, b = -1$ 时, 满足 $ab > 0$, 但 $a < 0, b < 0$, 故 B 是假命题;

若 a, b 都是奇数, 则 ab 是奇数, 故 C 是真命题;

对角相加等于 180° 的四边形的四个顶点在同一个圆上, 故 D 是假命题.

8. ABC 【解析】当 $x \geq 0$ 时, $|x| - 2x = x - 2x = -x \leq 0$, 当 $x < 0$ 时, $|x| - 2x = -x - 2x = -3x > 0$, 故 A 为真命题, 正确;

$\forall x \in \mathbf{Z}, x^2 \in \mathbf{Z}$, 故 B 为真命题, 正确;

因为 $x^2 - 2x + 4 = x^2 - 2x + 1 + 3 = (x - 1)^2 + 3 > 0$, 所以 $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 4 > 0$, 故 C 为真命题, 正确;

因为 $x^2 + 3x + 5 = x^2 + 3x + \frac{9}{4} + \frac{11}{4} =$

$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0$, 所以 $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 3x + 5 > 0$, 故 D 为假命题, 错误.

9. D 【解析】命题为全称量词命题, 则命题的否定为“ $\exists x \in (-1, 0), x^2 + x \geq 0$ ”. 故 D 正确.

易错警示 忽略量词的否定或

结论的否定致错

对含有量词的命题进行否定时, 不能只否定结论而忘记改变量词, 也不能只改变量词而忘记否定结论.

10. C 【解析】根据题意, 命题“ $\exists c > 0$, 方程 $x^2 - x + c = 0$ 有解”为存在量词命题, 其否定为“ $\forall c > 0$, 方程 $x^2 - x + c = 0$ 无解”. 故 C 正确.

11. A 【解析】命题是存在量词命题, 则命题的否定是: $\forall x \in [-1, 1], x^2 - 1 > 0$. 故 A 正确.

12. $\exists x > 1, x^2 \leq |x|$ 【解析】“ $\forall x > 1, x^2 > |x|$ ”的否定是: $\exists x > 1, x^2 \leq |x|$.

重难上分

1. D 【解析】命题“ $\exists x \in \mathbf{R}$, 使得 $x^2 - 2x + m = 0$ ”是真命题, 所以方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 有实数根, 即 $\Delta = 4 - 4m \geq 0$, 解得 $m \leq 1$, 所以实数 m 的取值范围是 $(-\infty, 1]$. 故 D 正确.

2. A 【解析】命题“ $\exists x \in [-1, 1], x^2 - 4x - 2m + 1 > 0$ ”为假命题,

则 $\forall x \in [-1, 1], x^2 - 4x - 2m + 1 \leq 0$ 为真命题, 即 $2m \geq x^2 - 4x + 1$.

设 $y = x^2 - 4x + 1, x \in [-1, 1]$, 函数图象开口向上, 对称轴方程为 $x = 2$, 所以当 $x = -1$ 时, 函数最大值为 $y_{\max} = 1 - (-4) + 1 = 6$, 故 $2m \geq 6$, 解得 $m \geq 3$. 故 A 正确.

3. $[-8, +\infty)$ 【解析】命题: $\exists x \in [1, 2], x^2 + 2x + a \geq 0$ 为真命题, 则 $a \geq -x^2 - 2x = -(x + 1)^2 + 1$ 成立, 即 $a \geq [-(x + 1)^2 + 1]_{\min} = -(2 + 1)^2 + 1 = -8$, 所以实数 a 的取值范围是 $[-8, +\infty)$.

4. 【解】 $x \in [1, 2]$, 恒有 $1 + x \leq 3$, 由 $\forall x \in [1, 2], a \geq 1 + x$, 得 $a \geq 3$.

因为 $\neg p$ 是假命题, 所以 p 是真命题, 即 $a \geq 3$. 因为 q 是真命题, 所以方程 $2x^2 + 5x + a = 0$ 有实数根, 即

$$\Delta = 25 - 8a \geq 0, \text{解得 } a \leq \frac{25}{8}.$$

综上可得 $3 \leq a \leq \frac{25}{8}$, 即实数 a 的

取值范围是 $\left[3, \frac{25}{8}\right]$.

5. 【解】若命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + m - 3 = 0$ 为真命题, 则 $\Delta = 4 - 4(m - 3) \geq 0$, 解得 $m \leq 4$;

若命题 $q: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 2(m - 5) \cdot x + m^2 + 19 \neq 0$ 为真命题, 则 $\Delta_1 = 4(m - 5)^2 - 4(m^2 + 19) < 0$,

解得 $m > \frac{3}{5}$. 又 p, q 都为真命题, 所

以实数 m 的取值范围是 $\left(\frac{3}{5}, 4\right]$.

6. 【解】(1) 令 $y = x^2 - 2x + m^2 - 3 = (x - 1)^2 + m^2 - 4$, 因为函数 y 在 $x = 1$ 时取最小值 $y_{\min} = m^2 - 4$, 所以“ $\exists x \in [0, 2]$, 使得不等式 $x^2 -$

$2x+m^2-3<0$ 成立”是真命题,需满足 $m^2-4<0$,解得 $-2<m<2$,即 $A=\{m|-2<m<2\}$.

(2) 因为不等式 $(x-3a)(x+a-2)\leq 0$ 的解集为 B ,且“ $x\in A$ ”是“ $x\in B$ ”的充分条件,所以 A 是 B 的子集.

① 当 $3a>2-a$,即 $a>\frac{1}{2}$ 时,解集 $B=[2-a,3a]$,所以 $\begin{cases} 2-a\leq -2, \\ 3a\geq 2, \end{cases}$ 解得 $a\geq 4$,综合得 $a\geq 4$;

② 当 $3a=2-a$,即 $a=\frac{1}{2}$ 时,不满足题设条件;

③ 当 $3a<2-a$,即 $a<\frac{1}{2}$ 时,解集 $B=[3a,2-a]$,所以 $\begin{cases} 3a\leq -2, \\ 2-a\geq 2, \end{cases}$ 解得 $a\leq -\frac{2}{3}$,综合得 $a\leq -\frac{2}{3}$.

综上所述,实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [4, +\infty)$.

7. 【解】(1) 因为 $p: \forall x \in [1, +\infty)$, $a-\frac{1}{2}x^2 \leq 0$,所以 $a \leq \frac{1}{2}x^2$,故 $a \leq \frac{1}{2}$,命题 $q: \exists x \in \mathbf{R}, x^2+2ax-8-6a=0$,故 $4a^2-4(-8-6a) \geq 0$,解得 $a \geq -2$ 或 $a \leq -4$. 当两个命题都是真命题时, a 的取值范围为 $\{a \mid -2 \leq a \leq \frac{1}{2} \text{ 或 } a \leq -4\}$.

(2) 因为两个命题中只有一个为真命题,当 p 真 q 假时,有 $\begin{cases} a \leq \frac{1}{2}, \\ -4 < a < -2; \end{cases}$

当 p 假 q 真时,有 $\begin{cases} a > \frac{1}{2}, \\ a \geq -2 \text{ 或 } a \leq -4, \end{cases}$

即 $a > \frac{1}{2}$. 综上, a 的取值范围为 $\{a \mid a > \frac{1}{2} \text{ 或 } -4 < a < -2\}$.

S2 考点训练

1. C 【解析】根据题意,命题 $p: \exists n \in \mathbf{N}, n^2 \geq 2^n$ 为存在量词命题,则命题 p 的否定应该为: $\forall n \in \mathbf{N}, n^2 < 2^n$. 故 C 正确.

2. B 【解析】 $\exists x \in \mathbf{R}, x^2-x+\frac{1}{4} < 0$,是存在量词命题,故 A 错误;所有正方形都是矩形是全称量词命题,且是真命题,故 B 正确; $\exists x \in \mathbf{R}, x^2+2x+2=0$ 是存在量词命题,故 C 错误;至少有一个实数 x ,使 $x^3+1=0$ 是存在量词命题,故 D 错误.

3. B 【解析】若 $\triangle ABC$ 中有一个角是 36° 且 $\triangle ABC$ 不是等腰三角形,则 $\triangle ABC$ 不是黄金三角形,反之,若 $\triangle ABC$ 为黄金三角形,则 $\triangle ABC$ 中必有一个角是 36° . 因此,“ $\triangle ABC$ 中有一个角是 36° ”是“ $\triangle ABC$ 为黄金三角形”的必要不充分条件. 故 B 正确.

4. A 【解析】不等式 $x^2-x+m>0$ 在 \mathbf{R} 上恒成立,则有 $\Delta = 1-4m < 0$,即 $m > \frac{1}{4}$,“不等式 $x^2-x+m>0$ 在 \mathbf{R} 上恒成立”的一个必要不充分条件是“ $m>0$ ”. 故 A 正确.

5. D 【解析】不等式 $(x+a)^2-16>0$,即 $(x+a)^2>16$,可得 $x<-4-a$ 或 $x>$

$4-a$. 若“ $(x+a)^2-16>0$ ”的一个必要不充分条件是“ $x \leq -3$ 或 $x \geq 2$ ”,则 $\begin{cases} -4-a \leq -3, \\ 4-a \geq 2 \end{cases}$ (等号不同时成立),解得 $-1 \leq a \leq 2$,故 a 的最大值为 2. 故 D 正确.

6. A 【解析】当 $A \cap B = A$ 时, $A \subseteq B$,集合 A 的元素个数小于或等于集合 B 的元素个数,即 $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$,充分性成立;反之,当 $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ 时,可能 $A=\{0,1\}, B=\{1,2\}$,此时 $A \cap B = \{1\} \neq A$,必要性不成立.

综上所述,“ $A \cap B = A$ ”是“ $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ ”的充分不必要条件. 故 A 正确.

7. C 【解析】命题“所有的四边形都是矩形”是全称量词命题,故①错误;命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2+1 < 1$ ”是全称量词命题,故②正确;命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, x^2+2x+1 \leq 0$,则 $\neg p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2+2x+1 > 0$,故③错误.

8. 【解】(1) 由命题 p 为真命题,可知 $B \subseteq A$. 当 $B = \emptyset$ 时, $\Delta = (-2a)^2-4a < 0$,解得 $0 < a < 1$;

当 $B = \{1\}$ 时, $\begin{cases} a \leq 0 \text{ 或 } a \geq 1, \\ 1+1=2a, \\ 1 \times 1 = a, \end{cases}$ 解得 $a=1$;

当 $B = \{2\}$ 时, $\begin{cases} a \leq 0 \text{ 或 } a \geq 1, \\ 2+2=2a, \\ 2 \times 2 = a, \end{cases}$ 找不到符合条件的 a 值;

当 $B = \{1, 2\}$ 时, $\begin{cases} a \leq 0 \text{ 或 } a \geq 1, \\ 1+2=2a, \\ 1 \times 2 = a, \end{cases}$ 找

不到符合条件的 a 值.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $(0, 1]$.

(2) 由“ $x \in C$ ”是“ $x \in A$ ”的必要条件, 可知 $A \subseteq C$, 所以

$$\begin{cases} 1^2 - m + 3 > 0, \\ 2^2 - 2m + 3 > 0, \end{cases} \text{ 解得 } m < \frac{7}{2}, \text{ 可知实}$$

数 m 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right)$.

9. (1) 【解】 $\because 8 = 3^2 - 1^2, 9 = 5^2 - 4^2,$
 $\therefore 8 \in A, 9 \in A$, 假设 $10 = m^2 - n^2, m,$
 $n \in \mathbf{Z}$, 则 $(|m| + |n|)(|m| - |n|) =$
 10 , 且 $|m| + |n| > |m| - |n| > 0,$
 $\therefore 10 = 1 \times 10 = 2 \times 5,$

$$\therefore \begin{cases} |m| + |n| = 10, \\ |m| - |n| = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} |m| + |n| = 5, \\ |m| - |n| = 2, \end{cases} \text{ 显然}$$

均无整数解, $\therefore 10 \notin A, \therefore 8 \in A,$
 $9 \in A, 10 \notin A$.

(2) 【证明】 \because 集合 $B = \{x | x = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, 则恒有 $2k + 1 =$
 $(k+1)^2 - k^2, \therefore 2k+1 \in A, \therefore$ 即一切
 奇数都属于 A . 又 $\because 8 \in A, \therefore$ “ $x \in$
 A ”的充分不必要条件是“ $x \in B$ ”.

(3) 【解】集合 $A = \{x | x = m^2 -$
 $n^2, m, n \in \mathbf{Z}\}, m^2 - n^2 = (m+n)(m-$
 $n)$ 成立.

①当 m, n 同奇或同偶时, $m-n, m+$
 n 均为偶数, $\therefore (m-n)(m+n)$ 为 4
 的倍数;

②当 m, n 一奇一偶时, $m-n, m+$
 n 均为奇数, $\therefore (m-n)(m+n)$ 为
 奇数.

综上, 所有满足集合 A 的偶数为
 $4k, k \in \mathbf{Z}$.

§3 不等式

3.1 不等式的性质

基础满分

1. A 【解析】 \because 长、宽、高之和不超过 M cm, 长、宽、高分别为 $a,$
 b, c (单位: cm), $\therefore a+b+c \leq M$. 故 A
 正确.

2. B 【解析】分别设红、黄、蓝、绿各
 有 a, b, c, d 个, 且 a, b, c, d 为正整
 数, 则由题意得 $a \geq c+1, c \geq d+1,$
 $d \geq b+1, 2b \geq a+1$, 即 $2b \geq c+1+1 \geq$
 $d+1+2 \geq b+1+3$, 可得 $b \geq 4$, 所以
 $a \geq 7, c \geq 6, d \geq 5$, 即至少有 $4+5+$
 $6+7=22$ (个). 故 B 正确.

3. 【解】假设有 x 间宿舍, y 个学生,
 根据题意得 $y = 4x + 19$ 且 $6(x-1) <$
 $y < 6x$, 解得 $9.5 < x < 12.5$, 又 $\because x \in$
 $\mathbf{Z}, \therefore \begin{cases} x=10, \\ y=59 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=11, \\ y=63 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=12, \\ y=67 \end{cases}$,
 即宿舍 10 间, 学生 59 人或宿舍 11
 间, 学生 63 人或宿舍 12 间, 学生
 67 人.

4. D 【解析】若 $a > 0 > b$, 则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 故
 A 错误;

已知 $a > b, c > d > 0$, 取 $a=5, b=4, c=$
 $3, d=2, a-c=b-d=2$, 故 B 错误;

已知 $a > b, c > d > 0$, 取 $a=2, b=1, c=$
 $6, d=3$, 则 $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, 故 C 错误;

$$\frac{d}{c} - \frac{d+4}{c+4} = \frac{4(d-c)}{c(c+4)}, \text{ 由 } c > d > 0, \text{ 可}$$

$$\text{得 } d - c < 0, \text{ 所以 } \frac{d}{c} - \frac{d+4}{c+4} =$$

$$\frac{4(d-c)}{c(c+4)} < 0, \text{ 即 } \frac{d}{c} < \frac{d+4}{c+4}, \text{ 故 D 正确.}$$

5. D 【解析】由 $a > b$, 取 $a=-1, b=$
 -2 时, $a > |b|$ 不成立;

取 $a=2, b=-1$ 时, $a^2 < b^2$ 不成立;

取 $c=0$ 时, $a|c| > b|c|$ 不成立;

$\therefore c^2 + 1 > 0, \therefore \frac{a}{c^2+1} > \frac{b}{c^2+1}$ 恒成立. 故

D 正确.

6. D 【解析】 $\because a > b > c, a+b+c=0,$
 $\therefore a > 0, c < 0, \therefore ac < 0$. 故 D 正确.

7. $a=1, b=-1, c=-2$ (答案不唯一)

【解析】当 $a=1, b=-1, c=-2$ 时,
 $a^2=1, bc=2$, 此时满足 $a > b > c$, 但
 是 $a^2 < bc$, 符合题意.

8. 【证明】要证 $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, 只需

证 $a\sqrt{a} + b\sqrt{b} \geq \sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})$, 即
 证 $(a+b-\sqrt{ab})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \geq \sqrt{ab} \cdot$
 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$, 即证 $a+b-\sqrt{ab} \geq \sqrt{ab}$,
 即证 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, 即证 $(\sqrt{a}-$
 $\sqrt{b})^2 \geq 0$. 该式显然成立, 所以 $\frac{a}{\sqrt{b}} +$

$$\frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

9. 【解】(1) 因为 $\frac{2\ 024}{2\ 025} > \frac{2\ 023}{2\ 025} >$

$\frac{2\ 022}{2\ 025}$, 所以点 $(2\ 023, 2\ 025)$ 的一
 个“上位点”的坐标为 $(2\ 024,$
 $2\ 025)$, 一个“下位点”的坐标为
 $(2\ 022, 2\ 025)$.

(2) 点 $(a+c, b+d)$ 不是点 (a, b) 的
 “上位点”; 点 $(a-c, b-d)$ 是点 $(a,$
 $b)$ 的“上位点”. 证明如下: 因为正
 数 a, b, c, d 满足 $a > c, b > d$, 可得
 $b-d > 0$, 且点 (a, b) 是点 (c, d) 的
 “上位点”, 即 $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, 即 $\frac{ad-bc}{bd} > 0$,

所以 $ad > bc$. 因为 $\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} =$

$$\frac{b(a+c)-a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} < 0, \text{ 即}$$

$$\frac{a+c}{b+d} < \frac{a}{b}, \text{ 所以点 } (a+c, b+d) \text{ 不是}$$

点 (a, b) 的“上位点”. 又因为
 $\frac{a-c}{b-d} - \frac{a}{b} = \frac{b(a-c)-a(b-d)}{b(b-d)} =$

$$\frac{ad-bc}{b(b-d)} > 0, \text{ 即 } \frac{a-c}{b-d} > \frac{a}{b}, \text{ 所以点}$$

$(a-c, b-d)$ 是点 (a, b) 的“上
 位点”.

10. C 【解析】 $b = \sqrt{7} - \sqrt{5} = \frac{2}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}, c =$

$$\sqrt{6} - 2 = \frac{2}{\sqrt{6} + 2}, \because \sqrt{7} + \sqrt{5} > \sqrt{6} + 2,$$

$$\therefore \frac{2}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} < \frac{2}{\sqrt{6} + 2}, \therefore b < c.$$

又 $a - c = \frac{5}{2} - \sqrt{6} = \sqrt{\frac{25}{4}} - \sqrt{6} > 0$, 故 $a > c$, 则 $a > c > b$. 故 C 正确.

11. A 【解析】因为 $P = a^2 + a + 1, Q = 3a - 1$, 所以 $P - Q = a^2 + a + 1 - 3a + 1 = a^2 - 2a + 2 = (a - 1)^2 + 1 > 0$, 所以 $P > Q$. 故 A 正确.

12. C 【解析】 $\because P = \sqrt{a} + \sqrt{a+5}, Q = \sqrt{a+2} + \sqrt{a+3} (a \geq 0), \therefore P > 0, Q > 0, \therefore P^2 = 2a + 5 + 2\sqrt{a(a+5)} = 2a + 5 + 2\sqrt{a^2 + 5a},$
 $Q^2 = 2a + 5 + 2\sqrt{(a+2)(a+3)} = 2a + 5 + 2\sqrt{a^2 + 5a + 6}, \therefore a^2 + 5a < a^2 + 5a + 6, \therefore \sqrt{a^2 + 5a} < \sqrt{a^2 + 5a + 6}, \therefore P^2 < Q^2, \therefore P < Q$. 故 C 正确.

13. C 【解析】 $\because ab = 1, \therefore b = \frac{1}{a},$
 $\therefore M = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+\frac{1}{a}} = \frac{1}{1+a} + \frac{a}{1+a} = 1,$
 $N = \frac{a}{1+a} + \frac{1}{1+\frac{1}{a}} = \frac{a}{1+a} + \frac{1}{1+a} = 1,$
 $\therefore M = N$. 故 C 正确.

14. B 【解析】 $a + b + c = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z = (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 - 3 \geq -3, \therefore a, b, c$ 三个数中至少有一个不小于 -1. 故 B 正确.

15. AC 【解析】因为 $1 < x < 6, -2 < y < 1$, 所以 $-1 < x + y < 7$, 故 A 正确;
 因为 $-2 < y < 1$, 所以 $-1 < -y < 2$, 所以 $0 < x - y < 8$, 故 B 错误;
 当 $-2 < y < 0$ 时, $-12 < xy < 0$; 当 $y = 0$ 时, $xy = 0$; 当 $0 < y < 1$ 时, $0 < xy < 6$. 即 $-12 < xy < 6$, 故 C 正确;

因为 $1 < x < 6$, 所以 $\frac{1}{6} < \frac{1}{x} < 1$, 当 $-2 < y < 0$ 时, $-2 < \frac{y}{x} < 0$; 当 $y = 0$ 时, $\frac{y}{x} = 0$; 当 $0 < y < 1$ 时, $0 < \frac{y}{x} < 1$, 所以 $-2 < \frac{y}{x} < 1$, 故 D 错误.

16. B 【解析】根据题意, 若 $-1 \leq x \leq y \leq 1$, 即 $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ -1 \leq y \leq 1, \end{cases}$ 则有 $-2 \leq x - y \leq 0$,
 $y \leq 0$, 即 $x - y$ 的取值范围为 $[-2, 0]$. 故 B 正确.

易错警示 忽略变量本身的大小关系

求两变量的差的取值范围时, 要注意两变量本身是否具备大小关系. 比如本题 $x \leq y$, 所以 $x - y \leq 0$.

17. (1, 18) 【解析】依题意, $-3 < 3x < 12, 4 < 2y < 6$, 则 $1 < 3x + 2y < 18$.

18. 思路导引 可先列方程组将 b 表示为 $a + b$ 和 $a - b$ 的组合, 再求取值范围.

$(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ 【解析】令 $b = m \cdot (a + b) + n \cdot (a - b) = (m + n)a + (m - n)b$, 所以 $\begin{cases} m + n = 0, \\ m - n = 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m = \frac{1}{2}, \\ n = -\frac{1}{2}, \end{cases}$ 所以 $b = \frac{1}{2}(a + b) - \frac{1}{2}(a - b)$. 因为 $0 \leq a + b < 1, 2 \leq a - b < 3$, 所以 $0 \leq \frac{1}{2}(a + b) < \frac{1}{2},$
 $-\frac{3}{2} < -\frac{1}{2}(a - b) \leq -1$, 所以 $-\frac{3}{2} < b = \frac{1}{2}(a + b) - \frac{1}{2}(a - b) < -\frac{1}{2}$.

19. [1, 11] 【解析】令 $3x - y = m \cdot (x + y) + n \cdot (x - y) = (m + n)x + (m - n)y$, 所以 $\begin{cases} m + n = 3, \\ m - n = -1, \end{cases}$ 解得

$\begin{cases} m = 1, \\ n = 2. \end{cases}$ 所以 $3x - y = (x + y) + 2(x - y)$. 因为 $1 \leq x - y \leq 5$, 所以 $2 \leq 2x - 2y \leq 10$, 又因为 $-1 \leq x + y \leq 1$, 由不等式的可加性得 $1 \leq 3x - y \leq 11$, 所以 $3x - y$ 的取值范围是 $[1, 11]$.

易错警示 因扩大范围致错

求取值范围时, 尽量避免多次使用不具有可逆性的条件, 要使用整体代换的思想解决问题.

20. 【解】 (1) 因为 $\frac{1}{2} \leq y \leq 3$, 所以

$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{y} \leq 2$, 又因为 $1 \leq x \leq 2$, 所以 $\frac{1}{3} \leq \frac{x}{y} \leq 4$, 所以 $\frac{x}{y}$ 的取值范围是 $[\frac{1}{3}, 4]$.

因为 $\frac{1}{2} \leq y \leq 3$, 所以 $-6 \leq -2y \leq -1$, 又因为 $1 \leq x \leq 2$, 所以 $-5 \leq x - 2y \leq 1$, 所以 $x - 2y$ 的取值范围是 $[-5, 1]$.

(2) 令 $2a - b = m(a + b) + n(b - a)$, $m, n \in \mathbf{R}$, 即 $(m - n)a + (m + n)b = 2a - b$,

则有 $\begin{cases} m - n = 2, \\ m + n = -1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m = \frac{1}{2}, \\ n = -\frac{3}{2}. \end{cases}$ 而

$0 < a + b < 2, -1 < b - a < 1$, 于是 $0 < \frac{a+b}{2} < 1, -\frac{3}{2} < -\frac{3}{2}(b-a) < \frac{3}{2}$, 所以 $-\frac{3}{2} < \frac{a+b}{2} - \frac{3}{2}(b-a) < 1 + \frac{3}{2}$, 即 $-\frac{3}{2} < 2a - b < \frac{5}{2}$, 所以 $2a - b$ 的取值范围为 $(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$.

3.2 基本不等式

基础满分

1. D 【解析】 $\because x > y > 1$, 由基本不等式

可得 $\sqrt{xy} < \frac{x+y}{2}$, 即 $\frac{2\sqrt{xy}}{x+y} < 1$, 化简得

$$\frac{2xy}{x+y} < \sqrt{xy}, \text{ 又 } \because \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{x+y}{2xy},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \cdot \frac{2xy}{x+y} = 1, \therefore x > y >$$

$$1, \therefore \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) < 1,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) < \frac{2xy}{x+y}, \therefore \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{y} \right) < \frac{2xy}{x+y} < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2}, \therefore \text{四个数中}$$

$$\text{最小的数是 } \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right). \text{ 故 D}$$

正确.

2. BD 【解析】 $a^2+1 \geq 2a (a \in \mathbf{R})$, 当且仅当 $a=1$ 时等号成立, 故 A 错误;

$$\text{由于 } x \neq 0, \text{ 所以 } |x| + \left| \frac{1}{x} \right| \geq$$

$$2\sqrt{|x| \cdot \left| \frac{1}{x} \right|} = 2, \text{ 当且仅当 } x = \pm 1$$

时等号成立, 故 B 正确;

$$\text{对于 } \frac{a+b}{\sqrt{ab}} \geq 2 (ab \neq 0), \text{ 当 } a \text{ 和 } b \text{ 都}$$

为正数时, 不等式才成立, 故 C 错误;

$$x^2 + \frac{1}{x^2+1} = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2+1} - 1 \geq 1, \text{ 当且}$$

仅当 $x=0$ 时, 等号成立, 故 D 正确.

3. (1) 【解】 结论: $a^3+b^3 \geq ab^2+a^2b$, 当且仅当 $a=b$ 时, 等号成立.

$$\text{证明: } (a^3+b^3) - (ab^2+a^2b) = (a^3 - ab^2) + (b^3 - a^2b) = a(a^2-b^2) + b(b^2 - a^2) = (a+b)(a-b)^2,$$

因为 a, b 都是正数, 所以 $(a+b) \cdot (a-b)^2 \geq 0$, 当且仅当 $a=b$ 时, 等号成立, 即 $a^3+b^3 \geq ab^2+a^2b$, 当且仅当 $a=b$ 时, 等号成立.

(2) 【证明】 因为 a, b 都是正数, 且

$$a+b=1, \text{ 所以 } \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) =$$

$$\left(1+\frac{a+b}{a}\right)\left(1+\frac{a+b}{b}\right) = \left(2+\frac{b}{a}\right) \cdot$$

$$\left(2+\frac{a}{b}\right) = 5+2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right) \geq 5 +$$

$$4\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 9, \text{ 当且仅当 } a=b=\frac{1}{2}$$

时, 等号成立.

4. 【解】 (1) $\because a>0, b>0, \therefore a^2+b^2 < a^2 +$

$$b^2 + 2ab = (a+b)^2, \therefore \frac{1}{a^2+b^2} >$$

$$\frac{1}{(a+b)^2}, \therefore \frac{a+b}{a^2+b^2} > \frac{1}{a+b}. \text{ 又 } \because a>b,$$

$$\therefore a-b>0, \therefore \frac{(a+b)(a-b)}{a^2+b^2} > \frac{a-b}{a+b}, \text{ 即}$$

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} > \frac{a-b}{a+b}.$$

$$(2) \text{ 【证明】 } \frac{b+c-a}{a} + \frac{c+a-b}{b} +$$

$$\frac{a+b-c}{c} = \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) +$$

$$\left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) - 3, \because a>0, b>0, c>0,$$

$$\therefore \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2, \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 2, \frac{c}{b} +$$

$$\frac{b}{c} \geq 2, \therefore \frac{b+c-a}{a} + \frac{c+a-b}{b} + \frac{a+b-c}{c} -$$

$$3 \geq 3, \text{ 当且仅当 } a=b=c \text{ 时等号成立.}$$

5. B 【解析】 $\because a<0,$

$$\therefore a + \frac{4}{a} + 1 = - \left[(-a) + \left(-\frac{4}{a}\right) \right] +$$

$$1 \leq -2\sqrt{(-a) \cdot \left(-\frac{4}{a}\right)} + 1 = -3,$$

当且仅当 $a=-2$ 时, 等号成立,

$$\text{故 } a + \frac{4}{a} + 1 \text{ 的最大值为 } -3, \text{ 故 B}$$

正确.

6. A 【解析】因为 $x, y \in \mathbf{R}, x^2+y^2 =$

$$2, \text{ 所以根据基本不等式有 } x^2+y^2 = 2 \geq 2xy, \text{ 即 } xy \leq 1, \text{ 当且仅当 } x=y =$$

± 1 时等号成立. 故 xy 的最大值为 1. 故 A 正确.

7. A 【解析】由题知 $a>2$, 则 $a-2>$

$$0, \text{ 则 } a + \frac{1}{a-2} = a-2 + \frac{1}{a-2} + 2 \geq$$

$$2\sqrt{(a-2) \cdot \frac{1}{a-2}} + 2 = 4, \text{ 当且仅当}$$

$$a=3 \text{ 时取等号, 则 } a + \frac{1}{a-2} \text{ 有最小}$$

值 4. 故 A 正确.

8. D 【解析】设一条直角边长为 x 米, $x \in (0, 4)$, 则另一直角边长为

$$\frac{4}{x} \text{ 米, 则斜边长为 } \sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}} \text{ 米, 可}$$

$$\text{得直角三角形的周长 } y = x + \frac{4}{x} +$$

$$\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} +$$

$$\sqrt{2\sqrt{x^2 \cdot \frac{16}{x^2}}} = 4 + 2\sqrt{2}, \text{ 当且仅当}$$

$$\begin{cases} x = \frac{4}{x}, \\ x^2 = \frac{16}{x^2}, \end{cases} \text{ 即 } x=2 \text{ 时等号成立. 又因}$$

为 $1.4 < \sqrt{2}$, 可得 $6.8 < 4 + 2\sqrt{2}$, 即三角形的周长大于 6.8 米, 所以合理(够用, 又浪费最少)的是 7 米.

故 D 正确.

9. 【解】 由题意可知, 二氧化碳每吨

$$\text{的平均处理成本为 } \frac{y}{x} = \frac{1}{2}x +$$

$$\frac{80\,000}{x} - 200, 400 \leq x \leq 600, \text{ 则 } \frac{y}{x} =$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{80\,000}{x} - 200 \geq$$

$$2\sqrt{\frac{1}{2}x \cdot \frac{80\,000}{x}} - 200 = 200, \text{ 当且}$$

$$\text{仅当 } \frac{1}{2}x = \frac{80\,000}{x}, \text{ 即 } x=400 \text{ 时等}$$

号成立, 故该单位月处理量为 400 吨时, 才能使每吨的平均处理成本最低, 最低成本为 200 元.

7.4 重难点上分

1. C 【解析】 $\because x>0, y>0, a>0,$

$$\therefore (ax+y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = a+1 + \frac{y}{x} +$$

$$\frac{ax}{y} \geq a+1 + 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{ax}{y}} = (\sqrt{a} +$$

$$1)^2 \left(\text{当且仅当 } \frac{y}{x} = \frac{ax}{y} \text{ 时取“=”} \right).$$

又 $\because (ax+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 9$ 恒成立,
 $\therefore (\sqrt{a}+1)^2 \geq 9$, 解得 $a \geq 4$. 故 C 正确.

2. B 【解析】因为 $x > \frac{1}{6}$, 所以 $6x-1 >$

0, 又 $y > 0$, 由 $x+y = \frac{1}{3}$, 得 $6x-1+6y =$

1, 则 $\frac{1}{6x-1} + \frac{6}{y} = \left(\frac{1}{6x-1} + \frac{6}{y}\right)(6x-1+6y) =$

$1 + \frac{6y}{6x-1} + \frac{6(6x-1)}{y} + 36 \geq$

$37 + 2\sqrt{\frac{6y}{6x-1} \cdot \frac{6(6x-1)}{y}} = 37 + 12 =$

49, 当且仅当 $\frac{6y}{6x-1} = \frac{6(6x-1)}{y}$ 时等

号成立, 即 $\begin{cases} 6x-1=y, \\ 6x-1+6y=1, \end{cases}$ 解得

$\begin{cases} x=\frac{4}{21}, \\ y=\frac{1}{7}, \end{cases}$ 即当且仅当 $x = \frac{4}{21}, y = \frac{1}{7}$

时, 等号成立. 所以 $\frac{1}{6x-1} + \frac{6}{y}$ 的最小值为 49. 故 B 正确.

3. C 【解析】(配凑法)

因为 $4a+3b=2a+b+2(a+b)=1$,

所以 $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+b} = [2a+b+2(a+b)]\left(\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+b}\right) =$

$1+2+\frac{2(a+b)}{2a+b} + \frac{2a+b}{a+b} \geq 3+2\sqrt{2}$, 当且仅当 $\frac{2(a+b)}{2a+b} =$

$\frac{2a+b}{a+b}$ 时等号成立, 即 $\begin{cases} a=\frac{3\sqrt{2}}{2}-2, \\ b=3-2\sqrt{2} \end{cases}$

相应地, $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+b}$ 有最小值 $3+2\sqrt{2}$. 故 C 正确.

【一题多解】(变量代换法)

设 $2a+b=x, a+b=y$, 满足 $4a+3b=mx+ny$, 其中 x, y 是正数,

则 $\begin{cases} 2m+n=4, \\ m+n=3, \end{cases}$ 解得 $m=1, n=2$, 可

得 $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, 当且仅当 $x =$

得 $x+2y=1$, 因此, $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+b} =$

$(x+2y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 3 + \frac{2y}{x} + \frac{x}{y} \geq 3 +$

$2\sqrt{2}$,

当且仅当 $\frac{2y}{x} = \frac{x}{y}$, 即 $x = \sqrt{2}y, x =$

$\sqrt{2}-1, y = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 等号成立,

此时 $\begin{cases} 2a+b=\sqrt{2}-1, \\ a+b=1-\frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$ 解得

$\begin{cases} a=\frac{3\sqrt{2}}{2}-2, \\ b=3-2\sqrt{2}. \end{cases}$ 相应地, $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+b}$ 有

最小值 $3+2\sqrt{2}$. 故 C 正确.

4. D 【解析】对任意实数 $x > 0, y > 0$, 不等式 $x + \sqrt{xy} \leq a(x+y)$ 可化为

$a \geq \frac{x + \sqrt{xy}}{x+y}$, 即 $a \geq \frac{1 + \sqrt{\frac{y}{x}}}{1 + \frac{y}{x}}$,

令 $t = 1 + \sqrt{\frac{y}{x}} (t > 1)$,

则 $a \geq \frac{t}{1+(t-1)^2}$, 令 $u = \frac{t}{1+(t-1)^2}$,

$t > 1$,

则 $u = \frac{t}{1+(t-1)^2} = \frac{1}{t + \frac{2}{t} - 2} \leq$

$\frac{1}{2\sqrt{t \cdot \frac{2}{t}} - 2} = \frac{1}{2\sqrt{2} - 2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$, 当

且仅当 $t = \frac{2}{t} = \sqrt{2}$ 时等号成立.

函数 $u = \frac{t}{1+(t-1)^2}$ 的最大值为

$\frac{\sqrt{2}+1}{2}$, 即 $a \geq \frac{\sqrt{2}+1}{2}$, 实数 a 的最小

值为 $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$. 故 D 正确.

5. 【解】(1) $\because x+y=1, x>0, y>0$,

$\therefore xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, 当且仅当 $x =$

$y = \frac{1}{2}$ 时等号成立, 故 xy 的最大值

是 $\frac{1}{4}$.

(2) $\because x+y=1$, 即 $x+y+1=2$,

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{2}{y+1} = \frac{1}{2}(x+y+1) \cdot$

$\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y+1}\right) = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{y+1}{x} + \frac{2x}{y+1}\right) \geq$

$\frac{1}{2}\left(3 + 2\sqrt{\frac{y+1}{x} \cdot \frac{2x}{y+1}}\right) = \frac{3+2\sqrt{2}}{2}$,

当且仅当 $\frac{y+1}{x} = \frac{2x}{y+1}$, 即 $x = 2\sqrt{2}-2$,

$y = 3-2\sqrt{2}$ 时等号成立, 故 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y+1}$

的最小值为 $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$.

6. 【解】 $\because a > b > 0, \therefore a-b > 0$,

$\therefore b(a-b) \leq \left[\frac{b+(a-b)}{2}\right]^2 = \frac{a^2}{4}$, 即

$b(a-b) \leq \frac{a^2}{4}$ (当且仅当 $a=2b$ 时取

等号). $\therefore a^2 + \frac{16}{b(a-b)} \geq a^2 + \frac{64}{a^2} \geq$

$2\sqrt{a^2 \cdot \frac{64}{a^2}} = 16$ (当且仅当 $a^2 = \frac{64}{a^2}$

时取等号). 要使 $a^2 + \frac{16}{b(a-b)} \geq 16$

成立, 需满足 $\begin{cases} a=2b, \\ a^2=\frac{64}{a^2}, \\ a>0, \end{cases}$ 解

得 $\begin{cases} a=2\sqrt{2}, \\ b=\sqrt{2}. \end{cases}$

综上所述, 当 $a = 2\sqrt{2}, b = \sqrt{2}$

时, $m = a^2 + \frac{16}{b(a-b)}$ 取得最小

值 16.

易错警示 多次使用基本不等式

忽略取等条件

注意连续使用基本不等式取等号时, 要满足任何一次等号成立时字母的取值存在且一致.

7. (1) 【证明】 $\because abc=1, a, b, c > 0$,

$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} =$
 $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \cdot abc = bc + ac + ab.$
 $\therefore 2(a^2 + b^2 + c^2) = (a^2 + b^2) +$
 $(b^2 + c^2) + (c^2 + a^2) \geq 2ab + 2bc + 2ac,$
 当且仅当 $a = b = c$ 时, 等号成立,
 $\therefore 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq$
 $2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right),$ 即 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq$
 $a^2 + b^2 + c^2,$ 当且仅当 $a = b = c$ 时, 等号成立.

(2) 【解】因为 $(\sqrt{a+7} + \sqrt{a+3})^2 =$
 $2a + 10 + 2\sqrt{(a+7)(a+3)} = 2a + 10 +$
 $2\sqrt{a^2 + 10a + 21},$
 $(\sqrt{a+4} + \sqrt{a+6})^2 = 2a + 10 +$
 $2\sqrt{(a+4)(a+6)} = 2a + 10 +$
 $2\sqrt{a^2 + 10a + 24},$ 又 $a \geq 0,$ 则 $a^2 +$
 $10a + 21 < a^2 + 10a + 24,$ 所以
 $(\sqrt{a+7} + \sqrt{a+3})^2 < (\sqrt{a+4} +$
 $\sqrt{a+6})^2,$ 则 $\sqrt{a+7} + \sqrt{a+3} < \sqrt{a+4} +$
 $\sqrt{a+6},$ 所以 $\sqrt{a+7} - \sqrt{a+4} < \sqrt{a+6} -$
 $\sqrt{a+3},$ 即 $m < n.$

8. 【证明】(1) 因为 a, b, c 都是正实数, 所以 $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} = \frac{1}{c} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \geq$
 $\frac{1}{c} \cdot 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = \frac{2}{c},$ 当且仅当
 $\frac{a}{b} = \frac{b}{a},$ 即 $a = b$ 时等号成立;
 $\frac{a}{bc} + \frac{c}{ab} = \frac{1}{b} \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) \geq \frac{1}{b} \cdot$
 $2\sqrt{\frac{a}{c} \cdot \frac{c}{a}} = \frac{2}{b},$ 当且仅当 $\frac{a}{c} = \frac{c}{a},$
 即 $a = c$ 时等号成立;
 $\frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} = \frac{1}{a} \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) \geq \frac{1}{a} \cdot$
 $2\sqrt{\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b}} = \frac{2}{a},$ 当且仅当 $\frac{b}{c} = \frac{c}{b},$
 即 $b = c$ 时等号成立.

所以 $2\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}\right) \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} +$
 $\frac{2}{c},$ 即 $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$
 当且仅当 $a = b = c$ 时等号成立.
 (2) 因为 $a > b > c,$ 且 $a + b + c = 0,$
 所以 $a > 0, c < 0, -b = a + c,$ 所以 $b^2 -$
 $ac = (a+c)^2 - ac = a^2 + ac + c^2 =$
 $\left(a + \frac{c}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}c^2 > 0,$ 所以 $b^2 - ac -$
 $3a^2 = a^2 + ac + c^2 - 3a^2 = -2a^2 + ac + c^2 =$
 $(2a+c)(c-a) = (a-b)(c-a).$ 由
 $a > b > c,$ 得 $a - b > 0, c - a < 0,$ 所以 $b^2 -$
 $ac - 3a^2 = (a-b)(c-a) < 0,$ 所以 $0 <$
 $b^2 - ac < 3a^2,$ 即 $\sqrt{b^2 - ac} < \sqrt{3}a.$

§3 考点训练

1. A 【解析】 $M - N = 2a(a-2) - (a +$
 $1)(a-3) = a^2 - 2a + 3 = (a-1)^2 + 2 >$
 $0,$ 所以 $M > N.$ 故 A 正确.

2. C 【解析】当 $x = 2, y = 0, z = -1$
 时, 不等式 $xy > yz, x|y| > z|y|, xz \geq$
 yz 均不成立, 故 A, B, D 错误;
 因为 $x > y > z,$ 且 $x + y + z = 1,$ 所以 $x >$
 $0,$ 所以 $xy > xz,$ 故 C 正确.

3. A 【解析】 a, b 为非零实数, 且 $a >$
 $b,$ 所以 $a - c > b - c,$ 故 A 正确;
 若 $c = 0,$ 则 $ac^2 = bc^2,$ 故 B 错误; 令
 $a = 1, b = -2,$ C, D 显然不成立, 故
 C, D 错误.

4. A 【解析】因为 $(c-a)(c-b) < 0,$
 $a < b,$ 所以 $a < c < b.$ 因为 $(d-a)(d-)$
 $b) > 0, a < b,$ 所以 $d < a$ 或 $d > b.$ 而
 $a < c < b, d < c,$ 所以 $d < a.$ 所以 $d <$
 $a < c < b.$ 故 A 正确.

5. B 【解析】当 $ab < 0$ 时, $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \leq$
 $-2,$ 当且仅当 $a = b$ 时等号成立, 故
 A 错误;

$\therefore m + n = 2, \therefore \frac{n}{m} + \frac{1}{2n} = \frac{2-m}{m} + \frac{1}{2n} =$

$\frac{2}{m} + \frac{1}{2n} - 1, \therefore \frac{2}{m} + \frac{1}{2n} =$
 $\left(\frac{2}{m} + \frac{1}{2n}\right)\left(\frac{m}{2} + \frac{n}{2}\right) = \frac{5}{4} + \frac{n}{m} +$
 $\frac{m}{4n} \geq \frac{5}{4} + 2\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{9}{4},$ 当且仅当
 $\frac{n}{m} = \frac{m}{4n},$ 即 $m = \frac{4}{3}, n = \frac{2}{3}$ 时等号成
 立, $\therefore \frac{2}{m} + \frac{1}{2n}$ 的最小值为 $\frac{9}{4}, \therefore \frac{n}{m} +$
 $\frac{1}{2n}$ 的最小值为 $\frac{5}{4},$ 故 B 正确;

$\therefore \sqrt{x^2+3}$ 与 $\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$ 不能相等, $\therefore y =$

$\sqrt{x^2+3} + \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$ 的最小值不是 2,

故 C 错误;

\therefore 当 $x > 0$ 时, $3x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{12} =$
 $4\sqrt{3},$ 当且仅当 $3x = \frac{4}{x},$ 即 $x = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

时等号成立, $\therefore -3x - \frac{4}{x} \leq -4\sqrt{3},$

$y = 2 - 3x - \frac{4}{x} \leq 2 - 4\sqrt{3},$ 故 D 错误.

6. A 【解析】由四边形 $ABCD$ 为矩
 形, $\triangle BCE$ 为等腰直角三角形, 可
 得 $\triangle ABF$ 也为等腰直角三角形, 所
 以图 ① 中, 阴影部分面积 $S_1 =$
 $S_{\triangle ABF} + S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2}\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} +$
 $\frac{1}{2}\sqrt{b} \cdot \sqrt{b} = \frac{a+b}{2},$ 图 ② 中, 矩形
 $ABCD$ 的面积 $S_2 = \sqrt{ab}.$ 由两图阴
 影部分面积关系直观得出 $S_1 \geq S_2,$
 即 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$ 当且仅当 $a = b$ 时等
 号成立. 故 A 正确.

7. A 【解析】 \therefore 三个正数 a, b, c 满
 足 $a \leq b + c \leq 2a, b \leq a + c \leq 2b,$
 $\therefore 1 \leq \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \leq 2$ ①, $\frac{b}{a} \leq 1 + \frac{c}{a} \leq$
 $\frac{2b}{a}$ ②, 由 ② 得 $-\frac{2b}{a} \leq -1 - \frac{c}{a} \leq$

$$-\frac{b}{a} \textcircled{3},$$

$$\textcircled{1}+\textcircled{3} \text{ 得 } 1-\frac{2b}{a} \leq \frac{b}{a}-1 \leq 2-\frac{b}{a} \textcircled{4},$$

$$\textcircled{4} \text{ 等价于 } \begin{cases} 1-\frac{2b}{a} \leq \frac{b}{a}-1, \\ \frac{b}{a}-1 \leq 2-\frac{b}{a}, \end{cases} \text{ 即}$$

$$\begin{cases} \frac{b}{a} \geq \frac{2}{3}, \\ \frac{b}{a} \leq \frac{3}{2}, \end{cases} \therefore \frac{2}{3} \leq \frac{b}{a} \leq \frac{3}{2}. \text{ 故 A}$$

正确.

8. ACD 【解析】当 $m=1$ 时, $a^2+b^2-ab=9$, $a^2+b^2=9+ab \leq 9+\frac{a^2+b^2}{2}$, $a^2+b^2 \leq 18$, 当且仅当 $a=b$ 时等号成立, 故 a^2+b^2 有最大值, 最大值为 18, 故 A 正确;

当 $m=3$ 时, $a^2+b^2-3ab=9$, 设 $ab=k$ ($k>0$), 则 $a^2+b^2-3ab=9$, 化为 $a^2+\frac{k^2}{a^2}-3k=9$, $a^4-(9+3k)a^2+k^2=0$, 因为 $\Delta=(9+3k)^2-4k^2=81+54k+5k^2>0$, 所以方程 $a^4-(9+3k)a^2+k^2=0$ 有解, 所以 ab 没有最大值, 故 B 错误;

当 $m=1$ 时, $a^2+b^2-ab=9$, $(a+b)^2=9+3ab \leq 9+\frac{3}{4}(a+b)^2$,

可得 $(a+b)^2 \leq 36$, $-6 \leq a+b \leq 6$,

当且仅当 $a=b=3$ 时, $a+b=6$, 当且仅当 $a=b=-3$ 时, $a+b=-6$, $a+b$ 有最小值, 最小值为 -6, 故 C 正确;

当 $m=3$ 时, $a^2+b^2-3ab=9$, $a^2+b^2=9+3ab \geq 9+3\left(-\frac{a^2+b^2}{2}\right)$, $a^2+b^2 \geq$

$\frac{18}{5}$, 当且仅当 $a=-b$ 时等号成立,

a^2+b^2 有最小值, 最小值为 $\frac{18}{5}$, 故 D

正确.

9. $(-\infty, 2]$ 【解析】当 $x>0$ 时, $x+$

$$\frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2, \text{ 当且仅当 } x =$$

$$\frac{1}{x}, \text{ 即 } x=1 \text{ 时, 等号成立, } \therefore \text{ 当 } x>$$

$$0 \text{ 时, } x+\frac{1}{x} \text{ 的最小值为 } 2, \text{ 又 } \because \text{ 命}$$

$$\text{题 } p: \forall x \in (0, +\infty), x+\frac{1}{x} \geq a \text{ 为}$$

$$\text{真命题, } \therefore a \leq 2, \text{ 即 } a \text{ 的取值范围}$$

10. $5+2\sqrt{6}$ 【解析】因为正实数 a, b

$$\text{满足 } a+b=1, \text{ 所以 } \frac{2}{a} + \frac{3}{b} =$$

$$\left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b}\right)(a+b) = 5 + \frac{2b}{a} + \frac{3a}{b} \geq 5 +$$

$$2\sqrt{6}, \text{ 当且仅当 } \sqrt{2}b = \sqrt{3}a, \text{ 即 } a =$$

$$\sqrt{6}-2, b=3-\sqrt{6} \text{ 时取等号.}$$

11. 5 【解析】因为 $xy>0$, 所以 $\frac{x}{y}>$

$$0, \frac{y}{x+y}>0, \frac{x+y}{y}>0, \text{ 则 } \frac{x}{y} + \frac{9y}{x+y} =$$

$$\frac{x+y-y}{y} + \frac{9y}{x+y} = \frac{x+y}{y} + \frac{9y}{x+y} - 1 \geq$$

$$2\sqrt{\frac{x+y}{y} \cdot \frac{9y}{x+y}} - 1 = 5,$$

$$\text{当且仅当 } x+y=3y, \text{ 即 } x=2y \text{ 时取}$$

12. 32 【解析】因为 $a>2b>0$,

$$\text{所以 } a-2b>0, \text{ 所以 } b(a-2b) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2b \cdot (a-2b) \leq \frac{1}{2} \times$$

$$\left(\frac{2b+a-2b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{8}, \text{ 当且仅当 } 2b =$$

$$a-2b, \text{ 即 } a=4b \text{ 时, 等号成立. 所}$$

$$\text{以 } \frac{a^4+4}{b(a-2b)} \geq \frac{a^4+4}{\frac{a^2}{8}} = 8 \times \frac{a^4+4}{a^2} =$$

$$8\left(a^2 + \frac{4}{a^2}\right) \geq 8 \times 2\sqrt{a^2 \times \frac{4}{a^2}} = 32, \text{ 当}$$

$$\text{且仅当 } a^2 = \frac{4}{a^2}, \text{ 即 } a = \sqrt{2} \text{ 时等号}$$

$$\text{成立, 所以 } \frac{a^4+4}{b(a-2b)} \geq 32, \text{ 当且仅}$$

$$\text{当 } a=\sqrt{2}, b=\frac{\sqrt{2}}{4} \text{ 时等号成立.}$$

13. (1) 【解】 $M-N=(x+7)(x+8)-(x+6)(x+9)=x^2+15x+56-(x^2+15x+54)=2>0$, 所以 $M>N$.

(2) 【证明】因为 $d>c>0, a<b<0$, 所以 $-a>-b>0$, 所以 $-ad>-bc$, 即 $ad<bc$. 又因为 $c<d$, 所以 $ad+c<bc+d$.

14. 【解】 (1) 因为 $x>0, y>0$, 且满足

$$\frac{4}{x} + \frac{1}{y} = 2, \text{ 所以 } x+y = \frac{1}{2}(x+y) \cdot$$

$$\left(\frac{4}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{2}\left(5 + \frac{4y}{x} + \frac{x}{y}\right) \geq$$

$$\frac{1}{2}\left(5 + 2\sqrt{\frac{4y}{x} \cdot \frac{x}{y}}\right) = \frac{9}{2}, \text{ 当且仅}$$

$$\text{当 } x=2y \text{ 且满足 } \frac{4}{x} + \frac{1}{y} = 2, \text{ 即}$$

$$y=\frac{3}{2}, x=3 \text{ 时取等号, 故 } x+y \text{ 的}$$

$$\text{最小值为 } \frac{9}{2}.$$

$$(2) \text{ 因为 } \frac{4}{x} + \frac{1}{y} = 2, \text{ 所以 } 4y+x =$$

$$2xy \geq 2\sqrt{4y \cdot x} = 4\sqrt{xy}, \text{ 当且仅}$$

$$\text{当 } x=4y, \text{ 即 } y=1, x=4 \text{ 时取等号,}$$

$$\text{所以 } xy \geq 4,$$

$$\text{则 } \frac{1}{(x+4)(y+1)} = \frac{1}{xy+x+4y+4} =$$

$$\frac{1}{3xy+4} \leq \frac{1}{16}, \text{ 当且仅当 } x=4, y=1$$

$$\text{时取等号, 故 } \frac{1}{(x+4)(y+1)} \text{ 的最}$$

$$\text{大值为 } \frac{1}{16}.$$

15. (1) 【证明】 设 $BM=x, BF=y, 0<$

$$x<1, \text{ 则 } CF=MF=1-y, \text{ 由勾股定}$$

$$\text{理可得 } x^2+y^2=(1-y)^2, \text{ 即 } y = \frac{1-x^2}{2}.$$

$$\text{由题意可知, } \triangle AMG \sim \triangle BFM, \text{ 设 } \triangle AMG, \triangle BFM \text{ 的周}$$

长分别为 p, p_1 , 则 $\frac{p}{p_1} = \frac{AM}{BF} = \frac{1-x}{y}$,

又因为 $p_1 = x+y+1-y = x+1$, 所以

$$p = \frac{1-x}{y} p_1 = \frac{1-x^2}{y} = 2, \text{ 所以 } \triangle AMG$$

的周长为定值, 且定值为 2.

(2)【解】设 $\triangle BFM$ 的面积为 S_1 ,

$$\text{则 } \frac{S}{S_1} = \frac{AM^2}{BF^2} = \frac{(1-x)^2}{y^2}, \text{ 因为 } S_1 =$$

$$\frac{1}{2}xy, \text{ 且 } 1 > x > 0, 1 > y > 0, \text{ 所以 } S =$$

$$\frac{(1-x)^2}{y^2} \cdot S_1 = \frac{(1-x)^2 x}{2y} =$$

$$\frac{(1-x)^2 x}{1-x^2} = \frac{(1-x)x}{1+x} = -(x+1) -$$

$$\frac{2}{x+1} + 3 \leq -2\sqrt{(x+1) \cdot \frac{2}{x+1}} + 3 =$$

$$3-2\sqrt{2}, \text{ 当且仅当 } 1+x = \frac{2}{1+x}, \text{ 即}$$

$x = \sqrt{2}-1$ 时, 等号成立, 故 S 的最大值为 $3-2\sqrt{2}$.

16.【解】(1) 当 $a=0$ 时, $2xy = x+y$,

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2, \therefore 2x+4y = (2x+$$

$$4y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(6 + \frac{4y}{x} +$$

$$\frac{2x}{y}\right) \geq \frac{1}{2}\left(6 + 2\sqrt{\frac{4y}{x} \cdot \frac{2x}{y}}\right) = 3 +$$

$$2\sqrt{2}, \text{ 当且仅当 } \frac{4y}{x} = \frac{2x}{y} \text{ 且 } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} =$$

$$2, \text{ 即 } y = \frac{2+\sqrt{2}}{4}, x = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \text{ 时取等}$$

号, 此时 $2x+4y$ 取得最小值 $3+2\sqrt{2}$.

(2) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $2xy = x+y+$

$$\frac{1}{2}(x+y)^2 - xy, \therefore 3xy = x+y +$$

$$\frac{1}{2}(x+y)^2 \leq 3 \times \left(\frac{x+y}{2}\right)^2, \text{ 解得 } x +$$

$y \geq 4$, 当且仅当 $x=y$ 且 $2xy = x +$

$$y + \frac{1}{2}(x^2+y^2), \text{ 即 } x=y=2 \text{ 时取等}$$

号, 故 $x+y$ 的最小值为 4.

§4 一元二次函数与一元二次不等式

基础满分

1. B 【解析】设函数 $y = x^2 + (m-3) \cdot x + 2m$, 由题图可得, 当 $x=2$

时, $y < 0$; 当 $x=0$ 时, $y > 0$, 即

$$\begin{cases} 4+2(m-3)+2m < 0, \\ 2m > 0, \end{cases} \text{ 解得 } 0 < m <$$

$$\frac{1}{2}. \text{ 故 B 正确.}$$

2. ABD 【解析】由题图可知, 图象开口向下, 对称轴在直线 $x=1$ 和 $x=0$ 之间, 图象与 x 轴有两个交点, 与 y 轴交于正半轴, 所以 $a <$

$$0, c > 0, \Delta = b^2 - 4ac > 0, -1 < -\frac{b}{2a} < 0,$$

故 $b < 0, 2a < b < 0, abc > 0$. 由题图可知, 当 $x=-1$ 时, $y > 0$; 当 $x=1$ 时, $y < 0$, 所以 $a-b+c > 0, a+b+c < 0$, 所以 $(a-b+c)(a+b+c) < 0$, 即 $(a+c)^2 - b^2 < 0$, 所以 $(a+c)^2 < b^2$. 综上所述, 故 ABD 错误, C 正确.

3. 4 【解析】由题意得 $x_1+x_2=4a$,

$$x_1x_2=a^2, \text{ 所以 } x_1+x_2+\frac{a}{x_1x_2}=4a+$$

$$\frac{1}{a} \geq 2\sqrt{4a \cdot \frac{1}{a}} = 4, \text{ 当且仅当 } a =$$

$$\frac{1}{2} \text{ 时“=”成立.}$$

4. $x^2-4x+3, 2x^2-4x+1, 4x^2-8x+3,$

$2x^2-4x+3$ (这四个答案中任意一个都可以, 答案不唯一)

【解析】第一种情况: 函数具有①②③三个性质, 设 $y = ax^2 - 4x + 3$

$$(a \neq 0), \text{ 则 } \frac{12a-16}{4a} = -1, \text{ 得 } a = 1,$$

所以 $y = x^2 - 4x + 3$;

第二种情况: 函数具有①②④三个性质, 设 $y = a(x-1)^2 - 1 (a \neq 0)$, 则 $-2a = -4$, 得 $a = 2$, 所以 $y =$

$$2(x-1)^2 - 1 = 2x^2 - 4x + 1;$$

第三种情况: 函数具有①③④三个性质, 设 $y = a(x-1)^2 - 1 (a \neq 0)$, 则

当 $x=0$ 时, $y = a-1 = 3$, 得 $a = 4$, 所以

$$y = 4(x-1)^2 - 1 = 4x^2 - 8x + 3;$$

第四种情况: 函数具有②③④三个性质, 设 $y = ax^2 - 4x + 3 (a \neq 0)$, 则

$$-\frac{4}{2a} = 1, \text{ 得 } a = 2, \text{ 所以 } y = 2x^2 -$$

$$4x + 3.$$

5. 8 【解析】二次函数 $y = ax^2 + 4x + c$,

其中 $a > c$, 若函数的最小值为 0, 则

$$\Delta = 16 - 4ac = 0, \text{ 即 } ac = 4, \text{ 且 } a > c >$$

$$0, \text{ 所以 } 2a - c > 0, \text{ 所以 } \frac{4a^2 + c^2}{2a - c} =$$

$$\frac{(2a-c)^2 + 4ac}{2a-c} = \frac{(2a-c)^2 + 16}{2a-c} =$$

$$2a - c + \frac{16}{2a-c} \geq 2\sqrt{(2a-c) \cdot \frac{16}{2a-c}} = 8,$$

当且仅当 $2a-c=4$ 时, 等号成立,

所以 $\frac{4a^2 + c^2}{2a-c}$ 的最小值为 8.

6. 【解】(1) \because 二次函数的最小值为

1, \therefore 设二次函数的顶点为 $(t, 1)$,

$$\therefore 2t-1=1, \text{ 解得 } t=1,$$

\therefore 设二次函数的解析式为 $y = a(x-1)^2 + 1, a \neq 0$. 又二次函数的

图象过点 $(2, 3)$, $\therefore a+1=3$, 解得

$a=2$, \therefore 该二次函数的解析式为 $y = 2(x-1)^2 + 1$, 即 $y = 2x^2 - 4x + 3$.

(2) 由(1)知, 当 $x=1$ 时, $y_{\min} = 1$.

令 $y = 2x^2 - 4x + 3 = 9$, 得 $x=3$ 或

$x=-1$. 结合二次函数的图象, 若

$-1 \leq x \leq m$ 时, $1 \leq y \leq 9$, 则 $1 \leq m \leq 3$, 即实数 m 的取值范围为 $[1, 3]$.

7. 【解】(1) 由已知可得, $\Delta =$

$$4(k+1)^2 - 4(k^2+3) = 8(k-1) > 0,$$

所以 $k > 1$, 由根与系数的关系可得

$$\begin{cases} x_1+x_2=2(k+1), \\ x_1x_2=k^2+3. \end{cases} \text{ 因为 } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{6}{7}, \text{ 所以 } \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = \frac{6}{7}, \text{ 即 } \frac{2(k+1)}{k^2+3} = \frac{6}{7},$$

整理可得 $3k^2-7k+2=0$, 解

得 $k = \frac{1}{3}$ (舍去) 或 $k = 2$, 所以 $k=2$.

(2) 由 (1) 知, $k > 1$,

$$\begin{cases} x_1+x_2=2(k+1), \\ x_1x_2=k^2+3, \end{cases} \text{ 则 } x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4(k+1)^2 - 2(k^2+3) = 2(k+2)^2 - 10, \text{ 因为 } k > 1, \text{ 所以 } x_1^2+x_2^2 > 2 \times (1+2)^2 - 10 = 8, \text{ 所以 } x_1^2+x_2^2 \text{ 的取值范围是 } (8, +\infty).$$

8. A 【解析】不等式 $-x^2-x+2>0$ 可化为 $(x-1)(x+2)<0$, 解得 $-2<x<1$, 所以不等式 $(1-x)(2+x)>0$ 的解集为 $(-2, 1)$. 故 A 正确.

易错警示 忽略二次项系数的

符号致错

在求解一元二次不等式时, 要注意首先把二次项系数转化为正数再求解.

9. ABD 【解析】因为 $ax^2-bx+c>0$ 的解集为 $(-1, 2)$, 所以 $a<0$. 又因

$$\begin{cases} a+b+c=0, \\ 4a-2b+c=0, \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} b=a, \\ c=-2a. \end{cases}$$

$b=a<0, c=-2a>0$, 故 A 正确;

因为 $1 \in (-1, 2)$, 所以 $a-b+c>0$, 故 B 正确;

因为解集为 $(-1, 2)$, 所以 $a+b+c=0$, 故 C 错误;

当 $ax^2+bx+c>0$ 时, 即 $ax^2+ax-2a>0$, 即 $x^2+x-2<0$, 解得 $x \in (-2, 1)$, 故 D 正确.

10. AD 【解析】若 $a=b=0$ 且 $c>0$, 则不等式 $ax^2+bx+c>0$ 恒成立, 解

集为 $M=\mathbf{R}$, 故 A 正确;

若 $M=\emptyset$, 不等式 $ax^2+bx+c>0$ 无解, 则 $a<0$ 且 $\Delta \leq 0$ 或 $a=b=0$ 且 $c \leq 0$, 故 B 错误;

设 $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{1}{t}$, 则 $a'=at, b'=bt, c'=ct$, 若 $t<0$, 则不等式 $a'x^2+b'x+c'>0$ 等价于 $ax^2+bx+c<0$, 解集不为 M , 故 C 错误;

若 $M = \{x \mid -1 < x < 2\}$, 则

$$\begin{cases} -\frac{b}{a} = -1+2, \\ \frac{c}{a} = -1 \times 2, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} b = -a, \\ c = -2a, \end{cases} \text{ 且 } a < 0,$$

不等式 $a(x^2+1)+b(x-1)+c<2ax$ 可化为 $x^2-3x>0$, 解得 $x<0$ 或 $x>3$, 所以不等式 $a(x^2+1)+b(x-1)+c<2ax$ 的解集为 $\{x \mid x<0 \text{ 或 } x>3\}$, 故 D 正确.

11. C 【解析】不等式 $x^2-ax+1<0$ 的解集为 $\{x \mid x_1<x<x_2\}$, 则 x_1 和 x_2 是方程 $x^2-ax+1=0$ 的两个不相等的实根,

则 $\Delta = a^2-4>0$, 解得 $a>2$ 或 $a<-2$, 且 $x_1^2+1=ax_1, x_2^2+1=ax_2, x_1+x_2=a, x_1x_2=1, (x_1-1)^2+(x_2-1)^2=x_1^2-2x_1+1+x_2^2-2x_2+1=ax_1-2x_1+ax_2-2x_2=(a-2)(x_1+x_2)=a(a-2)=3$,

即 $a^2-2a-3=0$, 解得 $a=3$ ($a=-1$ 舍去). 故 C 正确.

12. 【解】 (1) 由 $x^2+2x-15 \leq 0$, 得 $-5 \leq x \leq 3$, 故 $B = \{x \mid x^2+2x-15 \leq 0\} = \{x \mid -5 \leq x \leq 3\}$, 当 $a=1$ 时, $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 3\}$, $\therefore \complement_U A = \{x \mid x < -2 \text{ 或 } x > 3\}$, 故 $(\complement_U A) \cap B = \{x \mid x < -2 \text{ 或 } x > 3\} \cap \{x \mid -5 \leq x \leq 3\} = \{x \mid -5 \leq x < -2\}$.

(2) 当 $A=\emptyset$ 时, $a-3>2a+1$, 解得 $a<-4$, 此时 $A \subseteq B$, 符合题意要求;

当 $A \neq \emptyset$ 时, 若 $A \subseteq B$, 则必须有

$$\begin{cases} a \geq -4, \\ a-3 \geq -5, \text{ 解得 } -2 \leq a \leq 1. \\ 2a+1 \leq 3, \end{cases}$$

综上可得, 实数 a 的取值范围为 $\{a \mid a < -4 \text{ 或 } -2 \leq a \leq 1\}$.

13. D 【解析】由分式不等式 $\frac{x+5}{1-x} \leq 0$

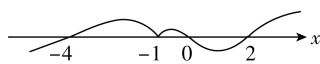
可转化为 $(x+5)(x-1) \geq 0$ 且 $1-x \neq 0$, 解得 $x \leq -5$ 或 $x > 1$, 所以不等式的解集为 $\{x \mid x \leq -5 \text{ 或 } x > 1\}$. 故 D 正确.

14. $(-\infty, -4) \cup (0, 2] \cup \{-1\}$

【解析】由 $\frac{(x+1)^2(2-x)}{x(4+x)} \geq 0$ 得

$$\begin{cases} x(x+1)^2(x-2)(x+4) \leq 0, \\ x(4+x) \neq 0, \end{cases}$$

令 $x(x+1)^2(x-2)(x+4)=0$, 解得 $x_1=-4, x_2=x_3=-1, x_4=0, x_5=2$, 采用“穿针引线法”可得图象如图所示.



由图象可知,

$$\begin{cases} x(x+1)^2(x-2)(x+4) \leq 0, \\ x(4+x) \neq 0 \end{cases} \text{ 的解}$$

集为 $(-\infty, -4) \cup (0, 2] \cup \{-1\}$.

15. 【解】 (1) 由 $(x-2)(1-3x)>2$, 可得 $3x^2-7x+4<0$, 即 $(3x-4)(x-1)<0$, 解得 $1<x<\frac{4}{3}$, 所以不等式 $(x-2)(1-3x)>2$ 的解集为 $\left\{x \mid 1<x<\frac{4}{3}\right\}$.

(2) 由 $\left|\frac{x+1}{x-1}\right|>2$ 可得 $\frac{x+1}{x-1}>2$ 或 $\frac{x+1}{x-1}<-2$, 所以 $\frac{x-3}{x-1}<0$ 或 $\frac{3x-1}{x-1}<0$, 解得 $1<x<3$ 或 $\frac{1}{3}<x<1$, 所以不等

式 $\left|\frac{x+1}{x-1}\right|>2$ 的解集为 $\left\{x \mid \frac{1}{3}<x<1 \text{ 或 } 1<x<3\right\}$.

16. 【解】(1) 不等式 $-2x^2+3x+9>0$ 可化为 $2x^2-3x-9<0$, 即 $(2x+3)(x-3)<0$, 解得 $-\frac{3}{2}<x<3$, 所以不等式的解集为 $\left\{x \mid -\frac{3}{2}<x<3\right\}$.

(2) 由 $\frac{8-x}{5+x} \geq 1$, 得 $\frac{8-x}{5+x} - 1 \geq 0$, 整理得 $\frac{2x-3}{x+5} \leq 0$, 即

$$\begin{cases} (2x-3)(x+5) \leq 0, \\ x+5 \neq 0, \end{cases} \text{ 解得 } -5 < x \leq \frac{3}{2},$$

所以不等式的解集

$$\text{为 } \left\{x \mid -5 < x \leq \frac{3}{2}\right\}.$$

(3) 由 $-x^2+2x-3>0$, 得 $x^2-2x+3<0$, 即 $(x-1)^2+2<0$, 所以不等式的解集为 \emptyset .

(4) 由 $x^2-14x+50>0$, 得 $(x-7)^2+1>0$, 所以不等式的解集为 \mathbf{R} .

17. B 【解析】设这辆汽车刹车前的车速为 v km/h, 根据题意有 $s = \frac{1}{20}v + \frac{1}{160}v^2 > 40$, 移项整理得 $v^2 + 8v - 6400 > 0$, $v > 0$, 解得 $v > -4 + 4\sqrt{401} \approx 76.1$. 所以这辆汽车刹车前的速度至少为 77 km/h, 故 B 正确.

18. $6+2\sqrt{5}$ 【解析】设桶的容积为 x L, 那么第一次倒出 4 L 纯农药液后, 桶内还有 $(x-4)$ L 纯农药液, 用水补满后, 桶内纯农药液的浓度为 $\frac{x-4}{x}$, 第二次又倒出 2 L 药液, 则此时桶内有纯农药液 $\left(x-4-\frac{2(x-4)}{x}\right)$ L, 依题意, 得 $x-4-\frac{2(x-4)}{x} \leq 50\% \cdot x$, 整理得 $x^2-12x+16 \leq 0$, 解得 $6-2\sqrt{5} \leq x \leq 6+2\sqrt{5}$, 因为 $x>4$, 所以 $4 < x \leq 6+2\sqrt{5}$, 故桶的容积最大为 $(6+2\sqrt{5})$ L.

19. (0,1) 【解析】由花卉带宽度为 x m ($0 < x < 3$) 得中间草坪的长为 $(8-2x)$ m, 宽为 $(6-2x)$ m, 根据题意可得 $(8-2x)(6-2x) > \frac{1}{2} \times 8 \times 6$, 整理得 $x^2-7x+6 > 0$, 即 $(x-6) \cdot (x-1) > 0$, 得 $0 < x < 1$ 或 $x > 6$, $x > 6$ 不合题意, 舍去. 故所求花卉带宽度 x 的取值范围为 $(0,1)$.

重难上分

1. C 【解析】根据题意, $ax^2-bx+c>0$ 的解集为 $\{x \mid -2 < x < 1\}$, 则方程 $ax^2-bx+c=0$ 的两个根为 $x=-2$ 和 $x=1$, 则有

$$\begin{cases} -2+1 = \frac{b}{a}, \\ (-2) \times 1 = \frac{c}{a}, \\ a < 0, \end{cases} \text{ 变形可得}$$

$$\begin{cases} b = -a, \\ c = -2a, \text{ 故函数 } y = ax^2 + bx + c = \\ a < 0, \end{cases}$$

$ax^2-ax-2a = a(x-2)(x+1)$, 是图象开口向下的二次函数, 且与 x 轴的交点坐标为 $(-1,0)$ 和 $(2,0)$, 故 C 正确.

2. AB 【解析】因为不等式 $ax^2+2bx+3c>0$ 的解集为 $\{x \mid -3 < x < 1\}$, 所以方程 $ax^2+2bx+3c=0$ 的两个根为 $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, 则有

$$\begin{cases} a < 0, \\ -3+1 = -\frac{2b}{a}, \text{ 得 } \begin{cases} b=a, \\ c=-a, \end{cases} \text{ 则 } a+b= \\ -3 \times 1 = \frac{3c}{a}, \end{cases} \begin{cases} b=a, \\ c=-a. \end{cases}$$

$2a < 0$, 故 A 正确;

$a+4b+12c = a+4a-12a = -7a > 0$, 故 B 正确;

由 $a = -c$ 可知, 不等式 $2ax+c>0$, 即 $2ax-a>0$, $a(2x-1)>0$, 因为 $a <$

0, 不等式可化为 $2x-1 < 0$, 解得 $x < \frac{1}{2}$, 所以不等式 $2ax+c>0$ 的解集

为 $\left\{x \mid x < \frac{1}{2}\right\}$, 故 C 错误;

化简 $2bx^2-cx-a < 0$ 得 $a(2x^2+x-1) < 0$, 结合 $a < 0$, 得 $2x^2+x-1 > 0$, 解得 $x > \frac{1}{2}$ 或 $x < -1$, 所以不等式

$2bx^2-cx-a < 0$ 的解集为 $\left\{x \mid x > \frac{1}{2} \text{ 或 } x < -1\right\}$, 故 D 错误.

3. $\left[\frac{5}{9}, 1\right)$ 【解析】若不等式 ax^2+

$bx+c \geq 0$ ($a>0$) 的解集不是 \mathbf{R} , 不妨设 $ax^2+bx+c=0$ 的根为 x_3, x_4 ($x_3 < x_4$), 则 $ax^2+bx+c \geq 0$ 的解集为 $(-\infty, x_3] \cup [x_4, +\infty)$, 依题意, 不等式 $ax^2+bx+c-1 \leq 0$ 的解集非空, 且方程 $ax^2+bx+c-1=0$ 有两个不相等实根 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 则 $ax^2+bx+c-1 \leq 0$ 的解集为 $[x_1, x_2]$, 即有 $x_1+x_2 = x_3+x_4 = -\frac{b}{a}$, 而 $x_1x_2 \neq$

x_3x_4 , 从而 x_1, x_2, x_3, x_4 的大小关系只有两种: $x_3 < x_1 < x_2 < x_4$, 此时原不等式组解集为空集, 不符合题意; $x_1 < x_3 < x_4 < x_2$, 此时不等式的解集为 $[x_1, x_3] \cup [x_4, x_2]$, 不符合题意. 因此 $ax^2+bx+c \geq 0$ ($a>0$) 的解集是 \mathbf{R} , $ax^2+bx+c-1 \leq 0$ 的解集是 $[-1, 2]$, 于是方程 $ax^2+bx+c=0$ 中 $\Delta = b^2-4ac \leq 0$, 且方程 ax^2+

$$bx+c-1=0 \text{ 中有 } \begin{cases} -1+2 = -\frac{b}{a}, \\ -1 \times 2 = \frac{c-1}{a}, \end{cases} \text{ 解}$$

$$\text{得 } \begin{cases} b = -a, \\ c = -2a+1, \end{cases}$$

从而 $\Delta = (-a)^2 - 4a(-2a+1) \leq 0$, 即 $9a^2-4a \leq 0$, 而 $a>0$, 解得 $0 < a \leq \frac{4}{9}$, 所以 $3a+2b+c = 3a+2(-a)-$

$2a+1 = -a+1 \in \left[\frac{5}{9}, 1\right)$, 即 $3a+2b+c$ 的取值范围是 $\left[\frac{5}{9}, 1\right)$.

4. D 【解析】由 $x^2 - (a+1)x + a \leq 0$, 得 $(x-a)(x-1) \leq 0$, 因为关于 x 的一元二次不等式 $x^2 - (a+1)x + a \leq 0$ 的解集中有且仅有 4 个正整数, 所以 $a > 1$, 不等式的解集为 $\{x | 1 \leq x \leq a\}$, 所以 $4 \leq a < 5$. 故 D 正确.

5. 【解】 当 $a = 0$ 时, 不等式化为 $-x+1 > 0$, 得 $x < 1$.

当 $a > 0$ 时, 原不等式化为 $(x-1) \cdot$

$$\left(x - \frac{1}{a}\right) > 0,$$

①当 $a > 1$ 时, 解不等式得 $x < \frac{1}{a}$ 或 $x > 1$;

②当 $a = 1$ 时, 解不等式得 $x \neq 1$;

③当 $0 < a < 1$ 时, 解不等式得 $x < 1$ 或 $x > \frac{1}{a}$.

综上所述, 当 $a = 0$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x < 1\}$; 当 $0 < a < 1$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x < 1 \text{ 或 } x > \frac{1}{a}\}$;

当 $a = 1$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x \neq 1\}$;

当 $a > 1$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x < \frac{1}{a} \text{ 或 } x > 1\}$.

易错警示 忽略对含参二次项系数的讨论致错

在处理一元二次不等式问题时, 要注意对二次项系数进行讨论. 二次项系数不为 0 是“二次”的前提. 分类应做到使所给参数 a 的集合的并集为全集, 交集为空集, 只有这样才能达到“既不重复又不遗漏”.

6. 【解】 (1) 当 $b = 2, c = -1$ 时, $y =$

$ax^2 + 2x - 1$, 因为“ $\exists x \in \mathbf{R}$, 使得 $y = 0$ ”为真命题, 所以方程 $ax^2 + 2x - 1 = 0$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 上有解,

当 $a = 0$ 时, $2x - 1 = 0$, 即 $x = \frac{1}{2}$, 符合题意;

当 $a \neq 0$ 时, 若要题设成立, 则 $\Delta = 4 + 4a \geq 0$, 解得 $a \geq -1$ 且 $a \neq 0$.

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $\{a | a \geq -1\}$.

(2) 当 $b = 2a - 1, c = -2$ 时, 原不等式为 $ax^2 + (2a - 1)x - 2 = (ax - 1) \cdot (x + 2) < 0$,

①当 $a = 0$ 时, 则 $-x - 2 < 0$, 解得 $x > -2$, 故不等式的解集为 $\{x | x > -2\}$;

②当 $a > 0$ 时, $\frac{1}{a} > -2$, 解原不等式可得 $-2 < x < \frac{1}{a}$, 此时原不等式的解集为 $\{x | -2 < x < \frac{1}{a}\}$;

③当 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时, $\frac{1}{a} < -2$, 解原不等式可得 $x < \frac{1}{a}$ 或 $x > -2$, 此时, 原不等式的解集为 $\{x | x < \frac{1}{a} \text{ 或 } x > -2\}$;

④当 $a = -\frac{1}{2}$ 时, 原不等式即为 $-\frac{1}{2}(x+2)^2 < 0$, 解得 $x \neq -2$, 此时, 原不等式的解集为 $\{x | x \neq -2\}$;

⑤当 $a < -\frac{1}{2}$ 时, $\frac{1}{a} > -2$, 解原不等式可得 $x < -2$ 或 $x > \frac{1}{a}$, 此时, 原不等式的解集为 $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > \frac{1}{a}\}$.

综上所述, 当 $a < -\frac{1}{2}$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > \frac{1}{a}\}$;

当 $a = -\frac{1}{2}$ 时, 原不等式的解集为

$\{x | x \neq -2\}$;

当 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x < \frac{1}{a} \text{ 或 } x > -2\}$;

当 $a = 0$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x > -2\}$;

当 $a > 0$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | -2 < x < \frac{1}{a}\}$.

7. 【解】 (1) 依题意, $-1, -\frac{1}{2}$ 是方程 $ax^2 + (a-1)x - 1 = 0$ 的两个实根, 且 $a < 0$, 于是 $-1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{a-1}{a}$, $-1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{a}$, 解得 $a = -2$, 所以实数 a 的值为 -2 .

(2) 当 $a < 0$ 时, 不等式 $ax^2 + (a-1) \cdot x - 1 \geq 0$ 化为 $\left(x - \frac{1}{a}\right)(x+1) \leq 0$, 当 $\frac{1}{a} = -1$, 即 $a = -1$ 时, 不等式为 $(x+1)^2 \leq 0$, 解得 $x = -1$;

当 $-1 < \frac{1}{a} < 0$, 即 $a < -1$ 时, 解得 $-1 \leq x \leq \frac{1}{a}$;

当 $\frac{1}{a} < -1$, 即 $-1 < a < 0$ 时, 解得 $\frac{1}{a} \leq x \leq -1$.

综上所述, 当 $a < -1$ 时, 原不等式的解集为 $\left[-1, \frac{1}{a}\right]$; 当 $a = -1$ 时, 原不等式的解集为 $\{-1\}$; 当 $-1 < a < 0$ 时, 原不等式的解集为 $\left[\frac{1}{a}, -1\right]$.

S4 考点训练

1. D 【解析】不等式可化为 $(2x-1)^2 \leq 0$, 解得 $x = \frac{1}{2}$, 即不等式的解集为 $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. 故 D 正确.

2. A 【解析】因为不等式 $ax^2 +$

$bx+c \geq 0$ 的解集是 $\left\{x \mid -\frac{1}{3} \leq x \leq 2\right\}$, 所以 $-\frac{1}{3}$ 和 2 为方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根, 且 $a < 0$, 所以

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}+2=-\frac{b}{a}, \\ -\frac{1}{3} \times 2 = \frac{c}{a}, \end{cases} \text{ 即 } b=-\frac{5}{3}a, c=-\frac{2}{3}a,$$

所以不等式 $cx^2+bx+a < 0$, 可化为不等式 $-\frac{2}{3}ax^2-\frac{5}{3}ax+a < 0$, 即 $2x^2+5x-3 < 0$, 即 $(2x-1)(x+3) < 0$, 解得 $-3 < x < \frac{1}{2}$, 所以不等式 $cx^2+bx+a < 0$ 的解集为 $\left\{x \mid -3 < x < \frac{1}{2}\right\}$. 故 A 正确.

3. C 【解析】因为关于 x 的一元二次不等式 $ax^2+bx+c > 0$ 的解集为 $\{x \mid 1 < x < 3\}$, 所以 1 和 3 为方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根, 所以 $c=3a, b=-4a, a < 0$, 则 $\frac{ax+b}{cx+a} > 0$ 等价于 $\frac{x-4}{3x+1} > 0$, 即 $(3x+1)(x-4) > 0$, 故不等式的解集为 $\left\{x \mid x < -\frac{1}{3} \text{ 或 } x > 4\right\}$. 故 C 正确.

4. A 【解析】不等式 $ax^2-(a-2)x-2 \leq 0$ 可变形为 $(ax+2)(x-1) \leq 0$, 当 $a=0$ 时, 不等式为 $2(x-1) \leq 0$, 其解集为 $(-\infty, 1]$; 当 $a > 0$ 时, 原不等式化为 $\left(x+\frac{2}{a}\right)(x-1) \leq 0$, 对应方程的两个实数根为 $-\frac{2}{a}$ 和 1 , 且 $-\frac{2}{a} < 1$, 所以不等式的解集为 $\left[-\frac{2}{a}, 1\right]$; 当 $a < 0$ 时, 原不等式化为 $\left(x+\frac{2}{a}\right)(x-1) \geq 0$, 对应方程的两个实数根为 $-\frac{2}{a}$ 和 1 , 当 $-2 < a < 0$ 时, $-\frac{2}{a} > 1$, 所

以不等式的解集为 $(-\infty, 1] \cup \left[-\frac{2}{a}, +\infty\right)$;

当 $a=-2$ 时, $-\frac{2}{a}=1$, 不等式的解集为 \mathbf{R} ;

当 $a < -2$ 时, $-\frac{2}{a} < 1$, 不等式的解集为 $\left(-\infty, -\frac{2}{a}\right] \cup [1, +\infty)$.

综上, 当 $a=0$ 时, 不等式的解集为 $(-\infty, 1]$;

当 $a > 0$ 时, 不等式的解集为 $\left[-\frac{2}{a}, 1\right]$;

当 $-2 < a < 0$ 时, 不等式的解集为 $(-\infty, 1] \cup \left[-\frac{2}{a}, +\infty\right)$;

当 $a=-2$ 时, 不等式的解集为 \mathbf{R} ;
当 $a < -2$ 时, 不等式的解集为 $\left(-\infty, -\frac{2}{a}\right] \cup [1, +\infty)$.

解集不可能为空集, 故 A 正确.

5. BC 【解析】一元二次方程 $x^2-2x+m=0$ 的一个实数根恰好落在 $(-1, 0)$ 内, 结合抛物线 $y=x^2-2x+m$ 关于直线 $x=1$ 对称, 可知在 $(-1, 0)$ 内函数值随着自变量的增大而减小, 故当 $x=-1$ 时, $y > 0$, 当 $x=0$ 时, $y < 0$, 即 $\begin{cases} (-1)^2+2+m > 0, \\ m < 0, \end{cases}$ 解得 $-3 < m < 0$, 故 BC 正确.

6. ABD 【解析】集合 $\{x \mid x^2+ax+b=0, a > 0\}$ 有且仅有两个子集, 则 $\Delta = a^2-4b=0$, 所以 $a^2=4b > 0$. 因为 $a^2-b^2-4 = -b^2+4b-4 = -(b-2)^2 \leq 0$, 所以 $a^2-b^2 \leq 4$, 故 A 正确;

因为 $a^2 + \frac{1}{b} = 4b + \frac{1}{b} \geq$

$2\sqrt{4b \cdot \frac{1}{b}} = 4$, 当且仅当 $4b = \frac{1}{b}$ 时

取等号, 所以 $a^2 + \frac{1}{b} \geq 4$, 故 B

正确;

因为不等式 $x^2+ax-b < 0$ 的解集为 (x_1, x_2) , 所以 $x_1x_2 = -b < 0$, 故 C 错误;

因为不等式 $x^2+ax+b < c$ 的解集为 (x_1, x_2) , 且 $|x_1-x_2| = 4$, 所以 $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2 = (x_1-x_2)^2$, 即 $a^2-4(b-c) = 16$, 化简得 $4c = 16$, 解得 $c=4$, 故 D 正确.

7. $\{a \mid a \leq 5\}$ 【解析】设点 (m, n) 在函数 $y = -x^2+3x-a$ 的图象上, 则 $n = -m^2+3m-a$, 则点 $(m, -n)$ 在函数 $y = x+1$ 的图象上, 即 $-n = m+1$, 所以 $-(m+1) = -m^2+3m-a$, 化简可得 $m^2-4m+a-1=0, \Delta = (-4)^2-4 \times (a-1) \geq 0$, 解得 $a \leq 5$.

8. ①③④ 【解析】不等式 $a(x-1) \cdot (x+3)+2 > 0$ 可化为 $ax^2+2ax-3a+2 > 0$, 因为关于 x 的不等式 $a(x-1)(x+3)+2 > 0$ 的解集是 (x_1, x_2) , $x_1 < x_2$, 所以 x_1, x_2 是方程 $ax^2+2ax-3a+2=0$ 的两个实根, 且 $a < 0$, 所以 $x_1+x_2 = -2, x_1x_2 = \frac{2}{a} - 3$.

对于①, $x_1+x_2+2 = -2+2=0$, 故正确;

对于②, 设 $y = ax^2+2ax-3a+2$, 且 $a < 0$, 对称轴方程为 $x = -1$, 因为当 $x = -2$ 时, $y = 4a-4a-3a+2 = -3a+2 > 0$, 当 $x = -3$ 或 $x = 1$ 时, $y = 2 > 0$, 所以 $x_2 > 1, x_1 < -3$, 故错误;

对于③, 因为 $a < 0$, 所以 $|x_1-x_2| = \sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2} = \sqrt{(-2)^2-4\left(\frac{2}{a}-3\right)} = \sqrt{16-\frac{8}{a}} > 4$, 故正确;

对于④, $x_1x_2+3 = \frac{2}{a}-3+3 = \frac{2}{a} < 0$, 故正确.

9. $\left(-\frac{5}{4}, 1-\sqrt{2}\right)$ 【解析】由题意可得命题“关于 x 的二次方程 x^2+2mx+

$2m+1=0$ 在 $(-1,3)$ 上有两个不同的解”是真命题,则函数 $y=x^2+2mx+2m+1$ 的图象在 $(-1,3)$ 上与 x 轴有两个不同的交点,

$$\begin{cases} (-1)^2+2m \times (-1)+2m+1>0, \\ 3^2+2m \times 3+2m+1>0, \\ -1<-\frac{2m}{2}<3, \\ (2m)^2-4(2m+1)>0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2>0, \\ 10+8m>0, \\ -3<m<1, \\ m^2-2m-1>0, \end{cases}$$

解得 $-\frac{5}{4}<m<1-\sqrt{2}$, 故实数 m 的

范围为 $(-\frac{5}{4}, 1-\sqrt{2})$.

10.【解】(1) 因为不等式 $ax^2-3x+b>0$ 的解集为 $\{x|x<1 \text{ 或 } x>2\}$, 所以 1, 2 是方程 $ax^2-3x+b=0$ 的两个根, 由根与系数的关系知

$$\begin{cases} 1+2=\frac{3}{a}, \\ 1 \times 2=\frac{b}{a}, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=1, \\ b=2. \end{cases}$$

(2) 把 $a=1$ 代入不等式 $cx^2-(ac+1)x+1<0$, 得 $cx^2-(c+1)x+1<0$, 令 $cx^2-(c+1)x+1=0$, 解得 $x=1$ 或 $x=\frac{1}{c}$. 因为 $c>0$, 所以

①当 $c=1$ 时, 不等式为 $(x-1)^2<0$, 解集为 \emptyset ;

②当 $c>1$ 时, $\frac{1}{c}<1$, 不等式的解集为 $\{x \mid \frac{1}{c}<x<1\}$;

③当 $0<c<1$ 时, $\frac{1}{c}>1$, 不等式的解集为 $\{x \mid 1<x<\frac{1}{c}\}$.

综上所述, 当 $c>1$ 时, 原不等式的解集为 $\{x \mid \frac{1}{c}<x<1\}$; 当 $c=1$ 时, 原不等式的解集为 \emptyset ; 当 $0<c<1$

时, 原不等式的解集为 $\{x \mid 1<x<\frac{1}{c}\}$.

11.【解】(1) 生产每吨产品的平均成本为

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{x^2}{4}-70x+10\,000}{x} = \frac{x}{4} + \frac{10\,000}{x} - 70 \geq 2\sqrt{\frac{x}{4} \cdot \frac{10\,000}{x}} - 70$$

$70=30$, 当且仅当 $\frac{x}{4} = \frac{10\,000}{x}$, 即

$x=200$ 时, 等号成立, 故当年产量为 200 吨时, 生产每吨产品的平均成本最低, 最低成本为 30 万元.

(2) 设年利润为 $w=50x-y=50x-(\frac{x^2}{4}-70x+10\,000) = -\frac{1}{4}(x-240)^2+4\,400$, 由题意可得 $w = -\frac{1}{4}(x-240)^2+4\,400 \geq 4\,000$, 解

得 $200 \leq x \leq 280$, 又因为生产线年产量最大为 220 吨, 所以 $200 \leq x \leq 220$.

综上, 当年产量在 200 到 220 吨之间时, 年利润不低于 4 000 万元.

12.【解】(1) 当 $a=-1$ 时, 不等式可化为 $x^2+2x-3 \geq 0$, 即 $(x-1)(x+3) \geq 0$, 解得 $x \leq -3$ 或 $x \geq 1$, 即不等式的解集为 $\{x \mid x \leq -3 \text{ 或 } x \geq 1\}$.

(2) $\because ax^2+2ax+5<0$ 的解集为 (m, n) , $\therefore m, n$ 是方程 $ax^2+2ax+5=0$ 的两个根, 且 $a>0$, $\therefore m+n=-2, mn=\frac{5}{a}>0$, $\therefore m<0, n<0$,

$$\therefore \frac{n}{m}>0, \frac{m}{n}>0, \therefore \frac{1}{m} + \frac{9}{n} = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{9}{n}\right)(m+n) = -\frac{1}{2} \left(10 + \frac{n}{m} + \frac{9m}{n}\right) \leq -\frac{1}{2} \left(10 + 2\sqrt{\frac{n}{m} \cdot \frac{9m}{n}}\right) = -8,$$

当且仅当 $\frac{n}{m} = \frac{9m}{n}$, 即 $m = -\frac{1}{2}$,

$n = -\frac{3}{2}$ 时, 等号成立, $\therefore \frac{1}{m} + \frac{9}{n}$ 的

最大值是 -8.

13.【解】(1) 因为 $a=1$ 且不等式 $ax^2-2ax+b+1>0$ 的解集是 $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$, 所以 -1, 3 是方程 $x^2-2x+b+1=0$ 的两根, 由根与系数的关系, 得 $-1 \times 3 = b+1$, 解得 $b=-4$. 则 $y=x^2-2x-3$.

验证: 当 $x^2-2x-3>0$ 时, 解得 $x<-1$ 或 $x>3$, 满足题意, 故实数 b 的值为 -4.

(2) 若 $b=0$, 则 $y=ax^2-2ax+1$, 不等式 $ax^2-2ax+b+1>0$, 即 $ax^2-2ax+1>0$.

当 $a=0$ 时, $1>0$ 恒成立, 则 $x>0$.

当 $a \neq 0$ 时, $\Delta = 4a^2 - 4a = 4a(a-1)$,

①当 $a<0$ 时, $\Delta>0$, 对称轴为直线 $x=1$, 且函数图象开口向下, 过定点 $(0, 1)$, 则方程 $ax^2-2ax+1=0$ 有且只有一个正根, 设方程的两根为 $x_1, x_2 (x_1<x_2)$, 由 $a<0$, 则

$$x_1 = \frac{2a+2\sqrt{a^2-a}}{2a} = 1 + \frac{\sqrt{a^2-a}}{a} < 0,$$

$$x_2 = \frac{2a-2\sqrt{a^2-a}}{2a} = 1 - \frac{\sqrt{a^2-a}}{a} > 0,$$

由不等式 $ax^2-2ax+1>0$, 解得 $1 + \frac{\sqrt{a^2-a}}{a} < x < 1 - \frac{\sqrt{a^2-a}}{a}$, 又 $x>0$, 所

$$\text{以 } 0 < x < 1 - \frac{\sqrt{a^2-a}}{a};$$

②当 $0<a<1$ 时, $\Delta<0$, 且函数图象开口向上, 则 $ax^2-2ax+1>0$ 恒成立, 则 $x>0$;

③当 $a=1$ 时, $\Delta=0$, 不等式为 $x^2-2x+1>0$, 解得 $x \neq 1$, 由 $x>0$, 得 $0<x<1$ 或 $x>1$;

④当 $a>1$ 时, $\Delta>0$, 且函数图象开口向上, 设方程 $ax^2-2ax+1=0$ 的两根为 $x_3, x_4 (x_3<x_4)$, 则由根与

系数的关系, 知 $\begin{cases} x_3+x_4=2>0, \\ x_3x_4=\frac{1}{a}>0, \end{cases}$ 则方程两根 x_3, x_4 均为正根, 且 $x_3 = \frac{2a-2\sqrt{a^2-a}}{2a} = 1 - \frac{\sqrt{a^2-a}}{a}$, $x_4 = \frac{2a+2\sqrt{a^2-a}}{2a} = 1 + \frac{\sqrt{a^2-a}}{a}$, 故由不等式 $ax^2-2ax+1>0$, 解得 $x < 1 - \frac{\sqrt{a^2-a}}{a}$ 或 $x > 1 + \frac{\sqrt{a^2-a}}{a}$, 又 $x > 0$, 所以 $0 < x < 1 - \frac{\sqrt{a^2-a}}{a}$ 或 $x > 1 + \frac{\sqrt{a^2-a}}{a}$.

综上所述, 若 $x > 0$, 则当 $a < 0$ 时, 不等式的解集为 $(0, 1 - \frac{\sqrt{a^2-a}}{a})$;

当 $0 \leq a < 1$ 时, 不等式的解集为 $(0, +\infty)$;

当 $a = 1$ 时, 不等式的解集为 $(0, 1) \cup (1, +\infty)$;

当 $a > 1$ 时, 不等式的解集为 $(0, 1 - \frac{\sqrt{a^2-a}}{a}) \cup (1 + \frac{\sqrt{a^2-a}}{a}, +\infty)$.

985 冲刺专题二 一元二次方程根的分布问题

1. D 【解析】设 $2x^2 - (m+1)x + m = 0$ 的两个不相等的正实根为 x_1, x_2 ,

$$\begin{cases} \Delta = (m+1)^2 - 8m > 0, \\ x_1+x_2 = \frac{m+1}{2} > 0, \\ x_1x_2 = \frac{m}{2} > 0, \end{cases} \quad \text{解得 } 0 < m < 3-2\sqrt{2} \text{ 或 } m > 3+2\sqrt{2}. \text{ 故 D 正确.}$$

2. B 【解析】由题意可得

$$\begin{cases} -a > 0, \\ 1+2a-a < 0, \\ 4+4a-a > 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} a < 0, \\ a < -1, \\ a > -\frac{4}{3}, \end{cases} \quad \text{解得} \quad -\frac{4}{3} < a < -1, \text{ 所以方程 } x^2+2ax-a=$$

0 在区间 $(0, 1)$ 和 $(1, 2)$ 各有一个根的充要条件是 $a \in (-\frac{4}{3}, -1)$. 故 B 正确.

3. D 【解析】若 $m = 0$, 则 $y = -x - 1$, 其图象与 x 轴的交点横坐标为 -1 , 故 $m = 0$ 符合题意. 若 $m \neq 0$, 函数 $y = 2mx^2 - x - 1$ 在区间 $(-2, 2)$ 上与 x 轴恰有一个交点, 则需满足:

$$\begin{aligned} & \text{① } (8m+1)(8m-3) < 0 \text{ 或} \\ & \text{② } \begin{cases} 8m+1=0, \\ -2 < \frac{1}{4m} < 0 \end{cases} \text{ 或 } \text{③ } \begin{cases} 8m-3=0, \\ 0 < \frac{1}{4m} < 2. \end{cases} \text{ 解} \\ & \text{① 得 } -\frac{1}{8} < m < 0 \text{ 或 } 0 < m < \frac{3}{8}; \text{ 解②} \end{aligned}$$

得 m 解集为 \emptyset ; 解③得 $m = \frac{3}{8}$. 综上所述, 实数 m 的取值范围是 $(-\frac{1}{8}, \frac{3}{8}]$. 故 D 正确.

易错警示 忽略含参函数的分类讨论致错

解此类二次项带参数问题, 容易忽视对二次项系数 m 进行讨论, 直接把 $y = 2mx^2 - x - 1$ 当作二次函数处理, 遗漏了 $m = 0$ 时的情况, 导致漏解.

4. D 【解析】记 $y = 2kx^2 - 2x - 5k - 1$, 由题意可知函数 y 的图象与 x 轴有两个交点, 所以 $k \neq 0$. 若 $k > 0$, 则 $y = 2kx^2 - 2x - 5k - 1$ 为图象开口向上的二次函数, 函数图象与 x 轴有两个交点且其横坐标一个大于 1, 一个小于 1, 则当 $x = 1$ 时, $y = 2k - 2 - 5k - 1 < 0$, 得 $k > -1$, 故 $k > 0$; 若 $k < 0$, 则 $y = 2kx^2 - 2x - 5k - 1$ 为图象开口向下的二次函数, 函数图象与 x 轴有两个交点且其横坐标一个大于 1, 一个小于 1, 则当 $x = 1$ 时, $y = 2k - 2 - 5k - 1 > 0$, 得 $k < -1$, 故 $k < -1$. 综上所述, 实数 k 的取值范围是 $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. 故 D 正确.

【一题多解】由两根情况得 $2k \cdot$

$(2k-2-5k-1) < 0$, 解得 $k < -1$ 或 $k > 0$.

5. $(1, \frac{7}{6}]$ 【解析】函数 $y = x^2 -$

$2(a+1)x+4$ 的图象在区间 $[\frac{1}{2}, 3]$ 上与 x 轴有两个交点, 即 $x^2 - 2(a+1)x + 4 = 0$ 在区间 $[\frac{1}{2}, 3]$ 上有两个不同的根, 所以

$$\begin{cases} \Delta = 4(a+1)^2 - 16 > 0, \\ (\frac{1}{2})^2 - 2(a+1) \times \frac{1}{2} + 4 \geq 0, \\ (3)^2 - 2(a+1) \times 3 + 4 \geq 0, \\ \frac{1}{2} < a+1 < 3, \end{cases}$$

解得 $1 < a \leq \frac{7}{6}$.

6. 【解】(1) 当 $a = 4$ 时, 可得 $x_1 + x_2 = 4$, $x_1x_2 = 3$, 则 $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 16 - 6 = 10$.

(2) $\because x_1 \in (0, 1), x_2 \in (4, 5)$,

$$\begin{cases} 0^2 - a \times 0 + 3 = 3 > 0, \\ 1 - a + 3 = 4 - a < 0, \\ 16 - 4a + 3 = 19 - 4a < 0, \\ 25 - 5a + 3 = 28 - 5a > 0, \end{cases} \quad \text{解得 } \frac{19}{4} < a < \frac{28}{5}, \text{ 故 } a \text{ 的范围 } (\frac{19}{4}, \frac{28}{5}).$$

7. 【解】 $m = 0$ 显然不符合题意.

当 $m \neq 0$ 时, 因为方程 $mx^2 + x + 1 = 0$ 在区间 $[-1, 1]$ 上有两个不相等的实数

$$\begin{cases} \Delta = 1 - 4m > 0, \\ -1 < -\frac{1}{2m} < 1, \\ m(m-1+1) = m^2 \geq 0, \\ m(m+1+1) = m(m+2) \geq 0, \end{cases}$$

根, 所以解得 $m \leq -2$. 所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty, -2]$.

8. 【解】(1) 当 $a = 2$ 时, $y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ 的图象的对称轴为直线 $x = 1$, 且开口向上, 所以 $x = 1$ 时, $y_{\min} = 0$;

又 $x = 0$ 时, $y = 1$, $x = 3$ 时, $y = 4$, 所以 $y_{\max} = 4$, 所以当 $x \in [0, 3]$, y 的

取值范围为 $[0, 4]$.

(2) $\because x^2 - ax - a + 3 = 0$ 有两个不相等的实数根分别为 x_1, x_2 , 且 $x_1 x_2 > 0$,

$$\therefore \begin{cases} \Delta > 0, \\ x_1 x_2 > 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} a^2 - 4(-a+3) > 0, \\ -a+3 > 0, \end{cases}$$

解得 $a < -6$ 或 $2 < a < 3$, 故 a 的取值范围为 $(-\infty, -6) \cup (2, 3)$.

985 冲刺专题三 与一元二次不等式有关的恒成立与有解问题

1. D 【解析】当 $a = 0$ 时, 不等式化为 $2 > 0$, 恒成立;

当 $a \neq 0$ 时, 要满足题意, 只需

$$\begin{cases} a > 0, \\ \Delta = a^2 - 8a < 0, \end{cases} \text{ 解得 } 0 < a < 8.$$

综上, 实数 a 的取值范围为 $[0, 8)$. 故 D 正确.

2. B 【解析】当 $x \in [-3, -1]$ 时, $x^2 + ax + 4 \geq 0$ 恒成立, 即 $a \leq -\left(x + \frac{4}{x}\right)$ 恒成立, 因此只需 $a \leq \left[-\left(x + \frac{4}{x}\right)\right]_{\min}$. 令 $y = -\left(x + \frac{4}{x}\right)$, $x \in [-3, -1]$, 则 $-x \in [1, 3]$, 因为 $y = (-x) + \left(-\frac{4}{x}\right) \geq 2\sqrt{(-x)\left(-\frac{4}{x}\right)} = 4$, 当且仅当 $-x = -\frac{4}{x}$, 即 $x = -2$ 时取等号, 所以当 $x \in [-3, -1]$ 时, $\left[-\left(x + \frac{4}{x}\right)\right]_{\min} = 4$, 所以 $a \leq 4$, 即实数 a 的最大值为 4.

3. D 【解析】因为 $x > 0, y > 0$, 且 $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$, 所以 $x+2+y = \frac{3}{2}(x+2+y) \cdot \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y}\right) = \frac{3}{2} \left(2 + \frac{y}{x+2} + \frac{x+2}{y}\right) \geq \frac{3}{2} \cdot \left(2 + 2\sqrt{\frac{y}{x+2} \cdot \frac{x+2}{y}}\right) = 6$, 当且仅当 $x+2 = y$, 即 $y = 3, x = 1$ 时取等号, 所以 $x+2+y$ 有最小值 6. 若 $x+$

$2+y > m^2 + 5m$ 恒成立, 即 $6 > m^2 + 5m$ 恒成立, 解得 $-6 < m < 1$. 故 D 正确.

4. BD 【解析】关于 x 的不等式 $x^2 - 2ax + a > 0$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 可得 $\Delta = (-2a)^2 - 4 \times 1 \times a < 0$, 解得 $0 < a < 1$, 而 $(0, 1) \subsetneq (0, 1], (0, 1) \subsetneq [0, +\infty)$. 故 BD 正确.

5. ABC 【解析】不等式 $x^2 - 4x - a - 1 \geq 0$ 在 $x \in [1, 4]$ 上有解, 即 $a \leq (x^2 - 4x - 1)_{\max}$ 在 $[1, 4]$ 上恒成立, 设 $y = x^2 - 4x - 1, x \in [1, 4]$, 则 $y = (x-2)^2 - 5$, 而当 $x = 1$ 时, $y = -4$, 当 $x = 4$ 时, $y = -1$, 故 y 在 $[1, 4]$ 上的最大值为 -1 , 故 $a \leq -1$, 所以 a 的取值可以是 $-6, -5, -1$. 故 ABC 正确.

6. $[-1, +\infty)$ 【解析】依题意可得, $(m+1)x^2 + (m+1)x + m + 2 \geq 0$ 对于 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 当 $m+1 = 0$, 即 $m = -1$ 时, $(m+1)x^2 + (m+1)x + m + 2 = 1 \geq 0$, 显然成立; 当 $m+1 \neq 0$ 时, 由题意得 $\begin{cases} m+1 > 0, \\ \Delta = (m+1)^2 - 4(m+1)(m+2) \leq 0, \end{cases}$ 解得 $m > -1$. 综上, 实数 m 的取值范围为 $[-1, +\infty)$.

7. $(-\infty, \sqrt{3})$ 【解析】 $mx^2 - 6x + 3m < 0$ 变形为 $m < \frac{6x}{x^2+3} = \frac{6}{x+\frac{3}{x}}$, 故 $m < \left(\frac{6}{x+\frac{3}{x}}\right)_{\max}$ 在 $(0, 2]$ 上成立, 因为 $x \in (0, 2]$, 所以 $x + \frac{3}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{3}{x}} = 2\sqrt{3}$, 则 $\frac{6}{x+\frac{3}{x}} \leq \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, 当且仅当 $x = \frac{3}{x}$, 即 $x = \sqrt{3}$ 时, 等号成立, 所以 $m < \sqrt{3}$.

8. 【解】(1) $\because y = ax^2 + bx + c$ 的图象的对称轴为直线 $x = 1$, 最小值为 -1 , 且当 $x = 0$ 时, $y = 0$,

$$\therefore \begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1, \\ c = 0, \\ \frac{4ac-b^2}{4a} = -1, \end{cases} \therefore \begin{cases} a = 1, \\ b = -2, \\ c = 0. \end{cases}$$

$$\therefore y = x^2 - 2x.$$

(2) $\because y > m - 2x$, 即 $x^2 > m$ 在 $[0, 3]$ 上恒成立, 又 \because 当 $x \in [0, 3]$ 时, x^2 有最小值 0, $\therefore m < 0$, \therefore 实数 m 的取值范围为 $(-\infty, 0)$.

9. 【解】(1) 当 $m = 0$ 时, 显然 $-6 < 0$, 满足题意;

当 $m < 0$ 时, 因为 $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, 所以 $mx^2 + mx + m - 6 = m(x^2 + x + 1) - 6 < 0$ 恒成立, 满足题意;

当 $m > 0$ 时, 则需 $\Delta = m^2 - 4m(m-6) > 0$, 解得 $0 < m < 8$.

综上, 实数 m 的取值范围是 $(-\infty, 8)$.

(2) 由题可知, 当 $x \in [-2, 1]$ 时, $m(x^2 - x + 1) - 2 < 0$ 恒成立. 因为 $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, 所以 $m(x^2 - x + 1) - 2 < 0$ 等价于 $m < \frac{2}{x^2 - x + 1}$. 因为 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ 在区间 $[-2, 1]$ 上的最大值为 7, 所以 $y = \frac{2}{x^2 - x + 1} = \frac{2}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$ 在区间 $[-2, 1]$ 上的最小值为 $\frac{2}{7}$, 所以只需 $m < \frac{2}{7}$ 即可, 所以实数 m 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{2}{7}\right)$.

第一章 综合检测

1. C 【解析】集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 \leq 0\} = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$,
 $B = \{x | x(3-x) > 0\} = \{x | x(x-3) < 0\} = \{x | 0 < x < 3\}$,
 所以 $A \cup B = \{x | -1 \leq x < 3\} = [-1, 3)$. 故 C 正确.

2. A 【解析】根据题意, “ $\forall x > 0, x^2 + 3x - 2 > 0$ ” 的否定是 “ $\exists x > 0, x^2 + 3x - 2 \leq 0$ ”. 故 A 正确.

3. B 【解析】 $0 < x < 1$, 不妨取 $x = \frac{1}{2}$,
 故 $a = \frac{3}{2}, b = 1, c = 2$, 故 $c > a > b$. 故 B 正确.

4. D 【解析】因为 $2 \leq x + y \leq 3$,
 $-2 \leq x - y \leq -1$, 所以 $4 \leq 2(x + y) \leq 6$, 所以 $2 \leq 2(x + y) + x - y \leq 5$, 所以
 $3x + y = 2(x + y) + (x - y) \in [2, 5]$.
 故 D 正确.

5. C 【解析】由 $2ab = a + 2b$ 可得,
 $\frac{1}{a} + \frac{1}{2b} = 1$, 所以 $a + 8b = (a + 8b) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2b}\right) = \frac{8b}{a} + \frac{a}{2b} + 5 \geq 2\sqrt{\frac{8b}{a} \cdot \frac{a}{2b}} + 5 = 9$, 当且仅当 $\frac{8b}{a} = \frac{a}{2b}$, 即 $a = 3, b = \frac{3}{4}$ 时取得等号, 所以 $a + 8b$ 的最小值为 9. 故 C 正确.

6. D 【解析】 \because 定义 $A \oplus B = \left\{x \mid x = \frac{m}{n}, m \in A, n \in B\right\}, A = \{1, 2, 4\}, B = \{2, 4, 8\}, \therefore A \oplus B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, 1, 2\right\}, \therefore A \oplus B$ 中元素个数为

5. 故 D 正确.

7. B 【解析】用两种方法求出第三

年的产量分别为 $5\,000(1+a)(1+b), 5\,000(1+x)^2$, 则 $(1+x)^2 = (1+a)(1+b)$. 所以 $1+x = \sqrt{(1+a)(1+b)} \leq \frac{1+a+1+b}{2} = 1 + \frac{a+b}{2}$, 所以 $x \leq \frac{a+b}{2}$, 当且仅当 $a=b$ 时等号成立. 故 B 正确.

8. D 【解析】根据不等式 $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ 可得 $\sqrt{4a^2+b^2} \cdot \sqrt{a^2+4b^2} \leq \frac{4a^2+b^2+a^2+4b^2}{2} = \frac{5}{2}(a^2+b^2)$, 当且仅当 $4a^2+b^2 = a^2+4b^2$, 即 $a^2=b^2$ 时等号成立, 所以 $\frac{\sqrt{4a^2+b^2} \cdot \sqrt{a^2+4b^2}}{a^2+b^2} \leq \frac{5}{2}$, 所以 $m = \frac{5}{2}$. 所以不等式 $x^2 - ax + b < 0$ 的解集为 $(1, 5)$. 根据一元二次不等式的解集与一元二次方程解的关系可知, 1 和 5 是方程 $x^2 - ax + b = 0$ 的两个解, 由根与系数的关系得 $\begin{cases} 1+5=a, \\ 1 \times 5=b, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=6, \\ b=5, \end{cases}$ 所以 $a+b=11$. 故 D 正确.

9. BD 【解析】取 $a=2, b=-3$, 满足 $a^2 < b^2$, 但 $a > b$, 故 A 错误;
 因为 $c > d$, 所以 $-c < -d$, 又因为 $a < b$, 所以 $a - c < b - d$, 故 B 正确;
 若 $a+c < b+d, c < d$, 取 $a=1, b=0, c=10, d=20$, 但 $a > b$, 故 C 错误;
 若 $0 < a < b, 0 < c < d$, 根据不等式的同向同正可乘性得 $ac < bd$, 故 D 正确.

10. ACD 【解析】原命题与其逆命题的真假没有必然联系, 故 A

错误;

若命题不正确, 则 $x = 2\,023$, 当 $x = 2\,023$ 时, $x^2 > 0$, 与 $x^2 \leq 0$ 矛盾, 故 B 正确;

“ $xy=0$ ” 的充要条件是 “ $x=0$ 或 $y=0$ ”, 故 C 错误;

命题 “小明的语文、数学月考成绩均超过了 100 分” 的否定是 “小明的语文、数学月考成绩不都高于 100 分”, 故 D 错误.

11. BD 【解析】 \because 不等式 $x + \frac{y}{4} < m^2 - 3m$ 有解, $\therefore \left(x + \frac{y}{4}\right)_{\min} < m^2 - 3m$, $\because x > 0, y > 0, \frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 1$,
 $\therefore x + \frac{y}{4} = \left(x + \frac{y}{4}\right) \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y}\right) = \frac{4x}{y} + \frac{y}{4x} + 2 \geq 2\sqrt{\frac{4x}{y} \cdot \frac{y}{4x}} + 2 = 4$, 当且仅当 $\frac{4x}{y} = \frac{y}{4x}$, 即 $x=2, y=8$ 时, 等号成立, $\therefore m^2 - 3m > 4, \therefore (m+1) \cdot (m-4) > 0, \therefore m < -1$ 或 $m > 4$,
 \therefore 实数 m 的取值范围是 $\{m \mid m < -1 \text{ 或 } m > 4\}$. 故 $M = \{m \mid m < -1 \text{ 或 } m > 4\}$, 故 BD 正确.

12. 充分不必要 【解析】不等式 $(m-1)x^2 + (m-1)x - 1 < 0$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则
 当 $m=1$ 时, 不等式可化为 $-1 < 0$, 显然恒成立;
 当 $m \neq 1$ 时, 则满足 $\begin{cases} m-1 < 0, \\ \Delta = (m-1)^2 + 4(m-1) < 0, \end{cases}$ 解得 $-3 < m < 1$.

综上可得, “关于 x 的不等式 $(m-1)x^2 + (m-1)x - 1 < 0$ 对任意的

$x \in \mathbf{R}$ 成立”等价于“ $-3 < m \leq 1$ ”, 所以“ $-3 < m < 1$ ”是“关于 x 的不等式 $(m-1)x^2 + (m-1) \cdot x - 1 < 0$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立”的充分不必要条件.

13. $(-2, 0)$ 【解析】 令 $y = x^2 + (a^2 - 1)x + a - 2$, 则 y 为图象开口向上的二次函数, 又由题知, 函数 y 的图象与 x 轴的交点的横坐标一个小于 -1 , 另一个大于 1 , 则根据函数图象有 $\begin{cases} 1 - (a^2 - 1) + a - 2 < 0, \\ 1 + (a^2 - 1) + a - 2 < 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a > 1 \text{ 或 } a < 0, \\ -2 < a < 1, \end{cases}$ 所以 $a \in (-2, 0)$.

14. $[-1, 0) \cup (6, 7]$ 【解析】 由题意, $x^2 - (m+3)x + 3m = (x-3) \cdot (x-m) < 0$.

①若 $m > 3$, 则解不等式得 $3 < x < m$, 因为不等式 $x^2 - (m+3)x + 3m < 0$ 的解集中恰有 3 个整数, 所以 $6 < m \leq 7$;

②若 $m = 3$, 则不等式无解, 不满足题意;

③若 $m < 3$, 则解不等式得 $m < x < 3$, 因为不等式 $x^2 - (m+3)x + 3m < 0$ 的解集中恰有 3 个整数, 所以 $-1 \leq m < 0$.

综上所述, 实数 m 的取值范围为 $[-1, 0) \cup (6, 7]$.

15. 【解】 (1) 解不等式 $x^2 - 2x - 3 < 0$, 得 $-1 < x < 3$, 所以 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\} = \{x | -1 < x < 3\}$, 当 $a = 2$ 时, $B = \{x | |x| < 2\} = \{x | -2 < x < 2\}$, 所以 $A \cup B = \{x | -2 < x < 3\}$, 由 $\complement_{\mathbf{R}} B = \{x | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 2\}$, 可得 $A \cap \complement_{\mathbf{R}} B = \{x | 2 \leq x < 3\}$.

(2) 若“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充分不必要条件, 则 $A \subsetneq B$, 可知 $B \neq \emptyset$, 故 $a > 0$. $A = \{x | -1 < x < 3\}$, 且

$B = \{x | |x| < a\} = \{x | -a < x < a\}$, 根据 $A \subsetneq B$, 可得 $-1 \geq -a$ 且 $3 \leq a$, 等号不同时取得, 故 $a \geq 3$, 实数 a 的取值范围是 $[3, +\infty)$.

16. 【解】 (1) 不等式 $x^2 + (a+2)x + b < 0$ 的解集为 $\{x | 1 < x < 5\}$, 即一元二次方程 $x^2 + (a+2)x + b = 0$ 的根为 $1, 5$, 由根与系数的关系得 $\begin{cases} 1+5 = -(a+2), \\ 1 \times 5 = b, \end{cases}$ 解得 $a = -8, b = 5$.

(2) $\because b = 2a, \therefore$ 不等式为 $x^2 + (a+2)x + 2a < 0, \therefore (x+2)(x+a) < 0$, 令 $(x+2)(x+a) = 0$, 得 $x_1 = -2, x_2 = -a$.

当 $-2 > -a$, 即 $a > 2$ 时, $-a < x < -2$;

当 $-2 = -a$, 即 $a = 2$ 时, 无解;

当 $-2 < -a$, 即 $a < 2$ 时, $-2 < x < -a$.

综上, 当 $a > 2$ 时, 解集为 $(-a, -2)$; 当 $a = 2$ 时, 解集为 \emptyset ; 当 $a < 2$ 时, 解集为 $(-2, -a)$.

17. 【解】 (1) 当命题 p 为真命题时, 有 $\Delta = (-2)^2 - 4(a+1) = -4a > 0$, 即 $a < 0$, 故集合 A 为 $(-\infty, 0)$.

(2) 由 $A \cap B = \{-2\}$ 得 $\{-2\} \subseteq B$, 即 $(-2)^2 + 2(m+1) \cdot (-2) + m^2 - 5 = m^2 - 4m - 5 = 0$, 解得 $m = 5$ 或 $m = -1$.

设 $x^2 + 2(m+1)x + m^2 - 5 = 0$ 的另一根为 n , 则 $n - 2 = -2(m+1)$, 即 $n = -2m$.

当 $m = 5$ 时, $n = -10$, 则 $A \cap B = \{-2, -10\}$, 不符合题意.

当 $m = -1$ 时, $n = 2$, 则 $A \cap B = \{-2\}$, 符合题意.

故实数 m 的值为 -1 .

(3) 由“ $x \in B$ ”是“ $x \in A$ ”的充分条件得 $B \subseteq A$.

①当 $B = \emptyset$ 时, 即 $\Delta = 4(m+1)^2 - 4(m^2 - 5) = 8m + 24 < 0$, 解得

$m < -3$;

②当 $B \neq \emptyset$ 时, 设 $x^2 + 2(m+1) \cdot x + m^2 - 5 = 0$ 的根为 x_1, x_2 , 则 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m+1) < 0, \\ x_1 x_2 = m^2 - 5 > 0, \\ \Delta = 8m + 24 \geq 0, \end{cases}$ 解得 $m > \sqrt{5}$.

故实数 m 的取值范围为 $(-\infty, -3) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$.

18. 【解】 (1) 因为 x, y 都是正数,

$$2x + y = (2x + y) \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} \right) = 4 + 1 +$$

$$\frac{2y}{x} + \frac{2x}{y} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{2y}{x} \cdot \frac{2x}{y}} = 5 + 4 = 9,$$

当且仅当 $\frac{2y}{x} = \frac{2x}{y}$, 即 $x = y = 3$ 时等号成立, 所以 $2x + y$ 的最小值为 9.

(2) 由 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1$, 可得 $x + 2y = xy$,

所以 $\lambda(x + 2y) \leq (3x + 2y)^2$ 整理为 $\lambda \cdot xy \leq (3x + 2y)^2$. 因为 x, y 都是正数, 所以 $\lambda \leq \frac{(3x + 2y)^2}{xy}$

$$\frac{9x}{y} + \frac{4y}{x} + 12. \text{ 因为 } \frac{9x}{y} + \frac{4y}{x} + 12 \geq$$

$$2\sqrt{\frac{9x}{y} \cdot \frac{4y}{x}} + 12 = 2 \times 6 + 12 = 24, \text{ 当}$$

且仅当 $2y = 3x$, 即 $x = \frac{8}{3}, y = 4$ 时

取等号, 所以 $\lambda \leq 24$. 所以实数 λ 的取值范围为 $(-\infty, 24]$.

19. 【解】 (1) 由题意知, $x^2 - x - 3 = x$, 即 $x^2 - 2x - 3 = 0, (x-3)(x+1) = 0$, 解得 $x_1 = -1, x_2 = 3$, 所以不动点为 -1 和 3 .

(2) 依题意, $2x^2 - (3+a)x + a - 1 = x$ 有两个不相等的正实数根, 即方程 $2x^2 - (4+a)x + a - 1 = 0$ 有两个不相等的正实数根,

$$\text{所以} \begin{cases} (4+a)^2 - 8(a-1) > 0, \\ \frac{4+a}{2} > 0, \\ \frac{a-1}{2} > 0, \end{cases} \quad \text{解得 } a > 1.$$

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2}{x_1 \cdot x_2} =$$

$$\frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1 \cdot x_2} - 2 = \frac{\left(\frac{4+a}{2}\right)^2}{\frac{a-1}{2}} - 2 =$$

$$\frac{(a+4)^2}{4} - 2 = \frac{(a-1+5)^2}{2(a-1)} - 2 =$$

$$\frac{(a-1)^2 + 10(a-1) + 25}{2(a-1)} - 2 = \frac{a-1}{2} +$$

$$\frac{25}{2(a-1)} + 3, \text{ 因为 } a > 1, \text{ 所以 } a-1 >$$

$$0, \text{ 所以 } \frac{a-1}{2} + \frac{25}{2(a-1)} + 3 \geq$$

$$2\sqrt{\frac{a-1}{2} \cdot \frac{25}{2(a-1)}} + 3 = 8, \text{ 即 } a = 6$$

时等号成立, 所以 $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ 的最小值为 8.

(3) 由题知, $ax^2 + (b+1)x +$

$(b-1) = x (a \neq 0)$, 所以 $ax^2 + bx + (b-1) = 0$, 由于函数 $y = ax^2 + (b+1)x + (b-1) (a \neq 0)$ 恒有不动点, 所以方程 $ax^2 + bx + (b-1) = 0$ 的 $\Delta = b^2 - 4a(b-1) \geq 0$, 即 $b^2 - 4ab + 4a \geq 0$, 又因为 b 是任意实数, 所以方程 $b^2 - 4ab + 4a = 0$ 的 $\Delta' = (-4a)^2 - 16a \leq 0$, 即 $a(a-1) \leq 0 (a \neq 0)$, 解得 $0 < a \leq 1$, 所以实数 a 的取值范围是 $(0, 1]$.

§1 生活中的变量关系 & §2 函数

基础满分

1. A 【解析】小麦的总产量与种子、施肥量、水、日照时间等因素有相关关系, 但不一定是函数关系, 故 A 正确.

2. AC 【解析】A 中容器为柱体, 水的高度的变化速度应为直线型, 故 A 正确;

B 中容器下粗上细, 水的高度的变化速度先慢后快, 故 B 错误;

C 中容器上粗下细, 水的高度的变化速度应先快后慢, 故 C 正确;

D 中容器的瓶身为球体, 水的高度的变化为快—慢—快, 故 D 错误.

3. A 【解析】根据函数定义, 自变量每确定一个值, 因变量就有唯一确定的值与之对应, 根据题意, 水的沸点与气压符合这个对应关系, 而储油量与油面宽度的对应不唯一, 不符合定义. 故 ①④ 正确, 故 A 正确.

4. C 【解析】对于 C 的图象, 存在一

个 x 对应两个 y 的情况, 不符合函数的定义.

易错警示 忽略定义中函数值的唯一性而致错

在判断函数的图象时, 注意一定要满足一个自变量唯一对应一个函数值.

5. C 【解析】A 图中函数的值域不是 $[0, 1]$, 故错误;

B 图中函数的定义域不是 $[0, 1]$, 故错误;

C 图函数的定义域为 $[0, 1]$, 值域为 $[0, 1]$, 故正确;

D 图不满足函数的定义, 不是函数的图象, 故错误.

6. C 【解析】对于 A, 函数的定义域为 $\{x | x \geq 0\}$, 两个函数的定义域不同, 不是同一函数, 故错误; 对于

B, $y = \sqrt{x^2} = |x|$, 对应关系不一致, 不是同一函数, 故错误; 对于 C, 函

数 $y = (\sqrt[3]{x})^3 = x$ 的定义域为 \mathbf{R} , 两个函数的定义域和对应关系相同, 是同一函数, 故正确; 对于 D, 函数的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 两个函数的定义域不同, 不是同一函数, 故

错误.

7. C 【解析】对于 A, $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $g(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq \pm 1\}$, 两个函数的定义域不同, 不是同一函数, 故错误;

对于 B, $f(x) = -\sqrt{x^2} = -|x|$ 与 $g(x) = -x$ 的对应关系不同, 不是同一函数, 故正确;

对于 C, $f(x) = \sqrt[3]{x^3} - 1 = x - 1$, 故 $f(x)$ 与 $g(t)$ 的定义域都为 \mathbf{R} , 对应关系也相同, 是同一函数, 故正确;

对于 D, $\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ x-1 \geq 0, \end{cases}$ 解得 $x \geq 1$, 即 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \geq 1\}$, 而 $x^2 - 1 \geq 0$, 解得 $x \geq 1$ 或 $x \leq -1$, 即 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, 两个函数的定义域不同, 不是同一函数, 故错误.

8. D 【解析】要判断两个函数是否是同一函数, 需要从两个方面来分析, 即定义域和对应关系, 对于 A, $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $g(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq 1\}$, 两个函数的定义域不同, 故不是同一函数, 故错误; 对于 B, $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $g(x)$